புதுமுறை இயற்கணிதம்

(MODERN ALGEBRA)

எல். இராஜகோபாலன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—320

புதுமுறை இயற்கணிதம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்

எல். இராஜகோபாலன், எம்.ஏ., பி.டி.,

கணிதப் பேராசிரியர்,

அரசினர் ஆடவர் கலைக் கல்லூரி, கும்பகோணம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—May, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 320

MODERN ALGEBRA

L. RAJAGOPALAN

Nett Price Rs. 5-00

(No Discount)

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of Books and literature in regional languages at the University level, of Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare.'

Printed by:
MOHANRAM PRESS,
101, P. H. Road, Madras-10.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி - உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்து வரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வாணியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'புதுமுறை இயற்கணிதம்' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 320ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 355 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. கணக் கொள்கையின் சில அடிப்படைக் கருத்துகள்

(Basic Concepts of Set Theory)

1.1. புதுமுறை இயற்கணிதம் (Modern Algebra)

நடைமுறையில் பயன்படும் எண்களின் தன்மைகளையும், அவற்றைக் கூட்டுதல், கழித்தல் போன்ற செயல்களையும் விவரிப்பது **எண் கணிதம்** (Arithmetic) ஆகும். இக் கணிதத்தில் காணப்படும் பல தனிப்பட்ட முடிவுகளையெல்லாம் பொதுமைப்படுத்தி, எண்களுக்குப் பதிலாகக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி, எண்களுடையவும் கோவைகளுடையவும் தன்மைகளை விவரிப்பது **இயற்கணிதம்** (Algebra or Generalised Arithmetic) ஆகும். உதாரணமாக, $4 + 5 = 5 + 4$; $10 + 8 = 8 + 10$ போன்ற பல எண் தன்மைகள் $a + b = b + a$ என்ற ஒரே முடிவால் இயற்கணிதத்தில் பொதுமைப்படுத்தப் படுகின்றன. இயற்கணிதத்திலுள்ள இதுபோன்ற பல முடிவுகள் கணித வளர்ச்சியில் பெரும்பங்கு கொண்டுள்ளன.

இந்த இயற்கணிதத்திலும் சென்ற ஒரு நூற்றுண்டில் ஒரு புதிய முறை தோன்றியுள்ளது. இத் தோன்றலுக்கு உண்டான சூழ்நிலையைச் சிறிது ஆராய்வோம். இயற்கணிதத்தில் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட சில தன்மைகள் பின்வருமாறு :

(1) $a + b = b + a$. **கூட்டலில் பரிமாற்றுவிதி** (Commutative law for addition) என்று இதற்குப் பெயர்.

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$. **கூட்டலில் சேர்ப்புவிதி** (Associative law for addition) என்று இதற்குப் பெயர்.

எண்களுக்கு முற்றிலும் மாறுபட்ட 'வெக்டர்' என்ற புதிய பொருள் கையாளப்பட்டபொழுது இந்த 'வெக்டர்'களும் மேற்கூறிய

விதிகளுக்கு உட்பட்டதாக இருப்பது தெரிய வந்தது. இதனால் மேற்கூறியவை போன்ற விதிகள் அவற்றுக்கு உட்பட்ட பொருள்களை மாத்திரம் சார்ந்தன அல்ல என்றும், எப்பொருள்களாக இருந்தாலும் மேற்கூறிய விதிகள் அப் பொருள்களுக்கும் உண்மையாக இருக்கலாம் என்றும் ஊகிக்கப்பட்டது. இதன்படி வரையறை செய்யப்படாத மூலப்பொருள்களின் (**elements**) கணத்தை (**set**) எடுத்து அவற்றின்மேல் சில செயல்களை (operations) மாத்திரம் வரையறுத்துச் சில கொள்கைகளை (axioms) அடிப்படையாகக் கொண்டால், தர்க்கரீதியாக அக் கணத்தைப்பற்றிய பல சுவையான முடிவுகள் காணப்படும். இம் முடிவுகள் வரையறுக்கப்பட்ட எண்கணங்களுக்கும் உண்மையானவைதாம். உருவுள்ள பொருள்களின் தன்மைகளிலிருந்து அருவமான (abstract) பொருள்களின் தன்மைகளைப் பொதுமைப்படுத்துவது, **அருவ இயற்கணிதம்** (Abstract **Algebra**) எனப்படும்.

வரையறுக்கப்படாத மிகச் சில பொருள்களை எடுத்து, மிகச் சில கொள்கைகளைக் கொண்டும் தர்க்கரீதியாகவும் இயற்கணிதத்தின் பல பகுதிகளையும் தொகுப்பதுதான் **புதுமுறை இயற்கணிதத்தின்** (Modern Algebra) நோக்கமாகும். இம் முறை வடிவ கணிதத்தில் 'யூக்லிட்' முதலியவர்களால் பழங்காலத்திலிருந்தே பயன்படுத்தப்பட்டதுதான். இம் முறையை இயற்கணிதத்தில் பயன்படுத்துவது சமீபத்தில்தான் தொடங்கியுள்ளது. இம்முறை தொகுமுறை (Postulational or Axiomatic or Synthetic or Deductive method) எனக் கூறப்படுகிறது.

கணக் கொள்கை (Set Theory)

ஒரு மூலப்பொருள் (element) ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தைச் சார்ந்தது (**set** membership) என்பதை மாத்திரம் அடிப்படையாகக் கொண்டு கணிதக் கருத்துகள் எல்லாவற்றையும் விளக்கிவிட முடியும் என்ற கண்டுபிடிப்பு, சமீபகாலத்தில் கணிதத்தில் உண்டான பெரும் சாதனையாகும்.

சில குறிப்பிட்ட மூலப்பொருள்களின் (elements) தொகுப்புக்குக் **கணம்** (set) என்று பெயர். பொருள்கள் எந்தவிதமாகவும் இருக்கலாம். ஒரு திராட்சைக்குலை, ஒரு மனிதக் கூட்டம், ஒரு நூல்நிலையம் போன்றன கணங்கள். இவற்றின் மூலப்பொருள்கள் முறையே திராட்சை, மனிதர்கள், புத்தகங்கள் ஆவன. கணத்தை A, B, X போன்ற பெரிய எழுத்துகளாலும், அவற்றின் மூலப்பொருள்களை a, b, x போன்ற சிறிய எழுத்துகளாலும் குறிப்பிடலாம். 'a' என்ற மூலப்பொருள் 'A' என்ற கணத்தைச் சார்ந்தது என்பது $a \in A$ (a belongs to A) என எழுதப்படுகிறது. 'a', 'A'-யைச் சார்ந்தது அன்று என்பது $a \notin A$ என எழுதப்படுகிறது.

ஒரு கணத்தையும், அதன் மூலப்பொருள்களையும் கீழ்க்கண்ட வாறு குறிப்பது ஒரு முறை:

$X = \{ x \}$. இங்கு X என்ற கணத்தில் x என்ற ஒரே மூலப் பொருள் உள்ளது.

$A = \{ x, y \}$. இங்கு A என்ற கணத்தில் x, y என்ற இரண்டு மூலப்பொருள்கள் உள்ளன.

மூலப்பொருள்களின் தன்மையை விவரித்தும் கணங்களைக் குறிப்பதுண்டு.

(உ-ம்.) P என்பது நேர் முழு எண்களின் கணம் (set of positive integers) என்க.

K என்பது 2 ஆல் வகுபடக்கூடிய நேர்முக எண்களின் கணம் என்க. இது,

$K = \{ a; a \in P, a,$ 2 ஆல் வகுபடக் கூடியது $\}$

எனக் குறிக்கப்படுகிறது. அடைப்புக்குள் காணப்படும் முதல் எழுத்து 'a', 'a' போன்ற பொருள் தொகுதியைக் குறிப்பது. ';' என்ற குறியீட்டுக்குப் பிறகு 'a'-யின் தன்மை விவரிக்கப்படுகிறது.

(உ-ம்.) $D = \{ a; a \in P, a < 6 \}$ என விவரிக்கப்பட்டால்,

$D = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ என ஆகிறது.

(உ-ம்.) $D = \{ 2, 4, 6, 8 \ldots \ldots \}$ எனக் குறிக்கப்பட்டால், D, எல்லா இரட்டை நேர்முழு எண்களின் கணம் எனப் பொருள்படுகிறது.

ஒரு கணத்திலுள்ள மூலப்பொருள்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதாக (finite) இருந்தால், இக் கணத்துக்கு முடிவுள்ள கணம் (finite set) என்று பெயர். ஒரு கணத்திலுள்ள மூலப்பொருள்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாததாக இருந்தால் இக் கணத்துக்கு முடி விலாக் கணம் என்று பெயர்.

1.2. உட்கணம் (Sub-set)

A-யின் ஒவ்வொரு மூலப்பொருளும் B-யின் ஒரு மூலப்பொருளாக இருந்தால், A, B-யின் உட்கணம் (A is a subset of B) எனப்படும். இது $A \subset B$ அதாவது, A, B-யில் அடங்கியுள்ளது (A is contained in B) என எழுதப்படுகிறது.

A, B என்ற இரு கணங்களிலும் அதே (same) மூலப்பொருள்கள் இருந்தால் $A = B$ எனப்படுகிறது.

$A \subset B$ என்னுமிடத்தில் $A = B$ என்னும் வாய்ப்பும் அடங்கி யுள்ளது. ஆதலால் A, B-யின் உட்கணம் என்பதை $A \subseteq B$ என எழுதலாம்.

A, B-யின் ஓர் உட்கணமாகவும், ஆனுல் $A \neq B$ எனவும் இருந்தால், A, B-யின் **சரியான உட்கணம்** (proper sub-set) எனப்படுகிறது. இதை $A \subset B$ என எழுதலாம்.

தேற்றம் 1.1: $A \subset B$, மற்றும் $B \subset A$ என்ருல் $A = B$ என ஆகிறது.

நிறுவல்: $A \subset B$ என்பதால், A-யின் ஒவ்வொரு மூலப்பொருளும் B-யையும் சார்ந்தது. $B \subset A$ என்பதால், B-யின் ஒவ்வொரு மூலப் பொருளும் A-யையும் சார்ந்தது. அதாவது, B-யைச் சாராத பொருள் A-யில் இல்லை என்றும், A-யைச் சாராத பொருள் B-யில் இல்லை என்றும் ஆகிறது. ஆகையால் A, B இரண்டிலும் அதே மூலப் பொருள்கள்தான் இருத்தல் வேண்டும் என்று தெளிவாகிறது.

ஆதலால் $A = B$.

ஒரு மூலப்பொருளும் இல்லாத ஒரு கணத்துக்கு **வெற்றுக் கணம்** (empty set) என்று பெயர். இது 'φ' = $\{ \quad \}$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. 'φ' என்பது எந்தக் கணத்துக்கும் ஓர் உட் கணமாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

(உ - ம்.) $A = \{ a, b, c \}$ என்க.

A-யின் உட்கணங்களாவன :

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$,

$\{a, b, c\}$, $\{ \quad \} = \varphi$. எட்டு உட்கணங்கள் உள்ளன.

A, A-யின் ஓர் உட்கணமாகவும் கருதப்படுகிறது. ஒரு பொருளை யும் கொள்ளாத வெற்றுக்கணமும் A-யின் ஓர் உட்கணமாகக் கருதப் படுகிறது.

மாதிரி 1 : M மூலப்பொருள்களைக் கொண்ட ஒரு கணத்துக்கு எத்தனை உட்கணங்கள் உள்ளன?

$$A = \{ a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n \} \text{ என்க.}$$

உட்கணங்களில் ஒரு பொருள் இருக்கலாம், இரண்டு பொருள்கள் இருக்கலாம். இவை போன்றவையும் n பொருள்களும் இருக்கலாம், பொருளே இல்லாமலும் இருக்கலாம் என்பதையும் உணர்ந்து, மொத்த உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை

$$^{n}c_0 + {}^{n}c_1 + {}^{n}c_2 \dots + {}^{n}c_n = (1+1)^n = 2^n$$

எனக் காண்கிறோம்.

1.3. A, B என்பன இரண்டு கணங்களானால் A, அல்லது B, அல்லது இரண்டையுமே சார்ந்த மூலப்பொருள்களின் கணம் $A \cup B$ (A கூட்டு B) அதாவது (A union B) எனப்படுகிறது.

$A \cup B$ என்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறும் குறிப்பிடலாம்.

$A \cup B \ \{x; x \in A$ அல்லது $x \in B\}$

A, B இரண்டு கணங்கள் ஆனால், A, B இவ்விரண்டுக்கும் பொதுவான மூலப்பொருள்களின் கணம் $A \cap B$ (A இடைவெட்டு B) அதாவது (A intersection B) எனப்படுகிறது. அதாவது,

$(A \cap B) = \{x; x \in A$, மற்றும் $x \in B\}$

A, B இரண்டு கணங்களானால், A-யைச் சார்ந்தும் B-யைச் சாராமலும் உள்ள மூலப்பொருள்களின் கணம் $A—B$ (A வித்தியாசம் B) அதாவது (A difference B) எனப்படுகிறது. அதாவது,

$A - B = \{x, x \in A$, மற்றும் $x \notin B\}$

மேற்கூறியவற்றுக்குச் சில உதாரணங்களைப் பார்ப்போம் :

$A = \{1, 2, 3\}; B = \{2, 4, 5\};$

$C = \{1, 3, 6\}$ என்க.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\};$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 6\};$

$A \cap B = \{2\}; \ B \cap C = \{ \ \} = \varphi$

$A - B = \{1, 3\}; \ B - A = \{4, 5\}$

என ஆகின்றன.

A, B என்ற இரண்டு கணங்களுக்கும் பொதுவாக ஒரு மூலப்பொருளும் இல்லையானால் A, B இவை முற்றிலும் **பொது அல்லாத கணங்கள்** (disjoint sets) எனப்படும்.

அதாவது $A \cap B = \varphi$ என ஆகிறது.

முழுமைக் கணம் (Universal Set)

நாம் கருதும் எல்லாக் கணங்களையும் தன் உட்கணமாகக் கொண்ட ஒரு கணத்துக்கு முழுமைக் கணம் U எனப் பெயர்.

(உ - ம்.) கீழ்க்கண்ட கணங்களைக் கருதுவோம்:

$A = \{x; x$ ஒரு பகா எண் (prime number)$\}$

$B = \{x; x$ 3-ன் மடங்கு $\}$

$C = \{ x ; x$ ஓர் இரட்டை முழு எண் $\}$

$D = \{ x ; x$ ஓர் ஒற்றை முழு எண் $\}$

இந்த எல்லாக் கணங்களும்

$U = \{ x ; x$ ஒரு முழு எண் $\}$ என்ற முழுமைக் கணத்தின் உட்கணங்கள்.

ஒரு கணத்தின் நிரப்பி (Complement of a Set)

U, முழுமைக் கணம் என்றும், A அதன் உட்கணமென்றும் கொள்வோம். U-வில், A-யைச் சாராததான எல்லா மூலப்பொருள் களையும் கொண்ட கணத்துக்கு A-யின் **நிரப்பிக் கணம்** அல்லது A-யின் **நிரப்பி** A^c (Complement of A) எனப் பெயர்.

அதாவது $A^c = U - A$ என ஆகிறது.

(உ-ம்.)

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ என்க.

$A = \{ 3, 5, 6 \}$ என்க.

இப்பொழுது, $A^c = \{ 1, 2, 4 \}$ என ஆகிறது.

1.4. இரண்டுக்கு மேற்பட்ட கணங்களுக்கும் மேற்கூறிய 'கூட்டு', 'இடைவெட்டு', 'வித்தியாசம்', 'நிரப்பி' போன்ற கருத்துகள் பொருந்தும்.

(உ-ம்.)

$A \cup (B \cup C) = \{ x ; x \in A$ அல்லது $x \in B$ அல்லது $x \in C \}$

$A \cap (B \cap C) = \{ x ; x \in A$ மற்றும் $x \in B$ மற்றும் $x \in C \}$

$A - (B \cup C) = \{ x ; x \in A$ மற்றும் $x \notin B$ மற்றும் $x \notin C \}$

$(A \cup B)^c = \{ x ; x \in U$ மற்றும் $x \notin A$ மற்றும் $x \notin B \}$

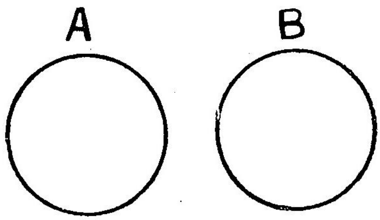
$(A \cap B)^c = \{ x ; x \in U$, மற்றும் $x \notin A$ அல்லது $x \notin B \}$

[இங்கு, $x \notin (A \cup B)$ என்றால், $x \notin A$ மற்றும் $x \notin B$ என்பதும், $x \notin (A \cap B)$ என்றால், $x \notin A$ அல்லது $x \notin B$ என்பதும் குறிப்பிடத்தக்கது.]

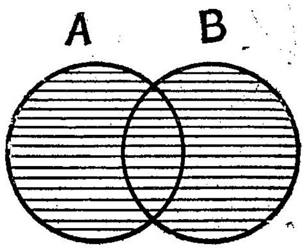
1.5. வெண் படங்கள் (Venn diagrams)

கணங்களின் இணைப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு படங்கள்மூலம் விளக்கலாம். இப் படங்களுக்கு **வெண் படங்கள்** எனப் பெயர். முழுமைக் கணம் U, ஒரு செவ்வகத்திலுள்ள புள்ளிகளாலும், அதனுடைய உட்கணங்கள் வட்டங்களிலுள்ள புள்ளிகளாலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

1) A, B முற்றிலும் பொது அல்லாத கணங்கள்.

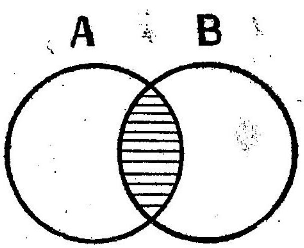


2) $A \cup B$



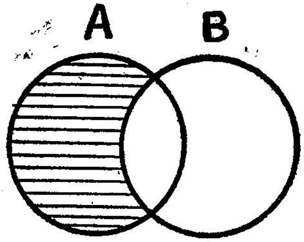
கோடிடப்பட்ட பகுதி

3) $A \cap B$



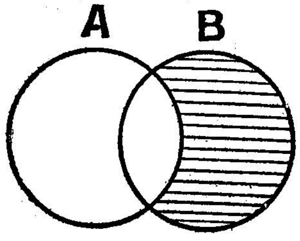
கோடிடப்பட்ட பகுதி

4) $A - B$



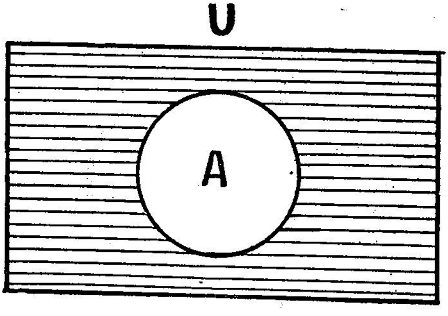
கோடிடப்பட்ட பகுதி

5) $B - A$



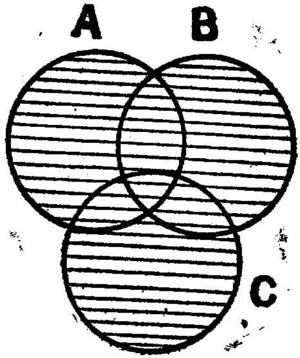
கோடிடப்பட்ட பகுதி

6) A^c



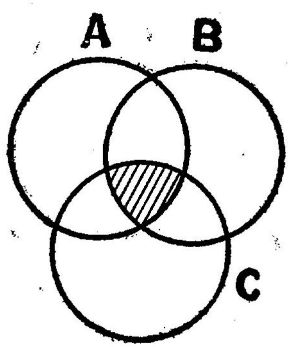
கோடிடப்பட்ட பகுதி

7) $A \cup (B \cup C)$



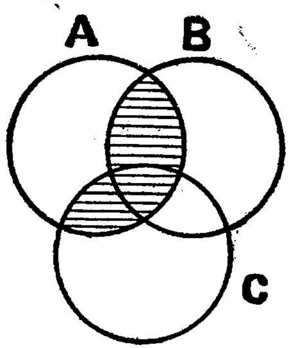
கோடிடப்பட்ட பகுதி

8) $A \cap (B \cap C)$



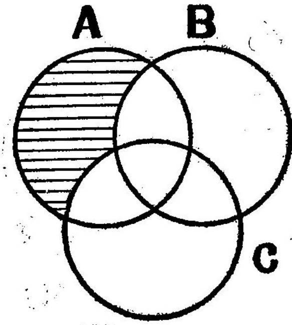
கோடிடப்பட்ட பகுதி

9) $A \cap (B \cup C)$



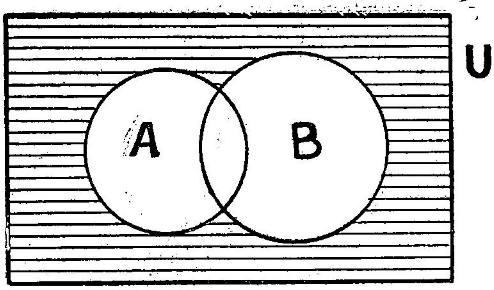
கோடிடப்பட்ட பகுதி

10) $A-(B \cup C)$



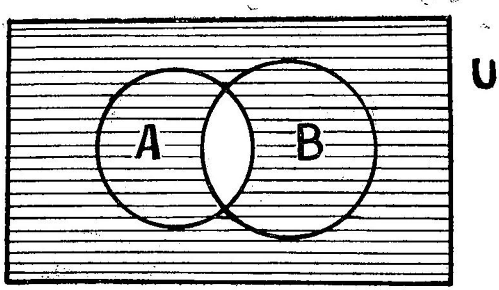
கோடிடப்பட்ட பகுதி

11) $(A \cup B)^c$



கோடிடப்பட்ட பகுதி

12) $(A \cap B)^c$



கோடிடப்பட்ட பகுதி

மேற்காணும் படங்களிலிருந்து கீழ்க்கண்டவை போலுள்ள பல உண்மைகளை அறியலாம்.

(உ-ம்.) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

[இவற்றுக்குப் பரிமாற்று விதிகள் (Commutative law) எனப் பெயர்.]

$$A \cap B \subset A$$

$$(A-B) \cap (B-A) = \varphi$$

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \varphi$$

$$U^c = \varphi \; ; \quad \varphi^c = U$$

$$(A^c)^c = A$$

தேற்றம் 1.2: கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும் :

1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

[இவற்றுக்குச் சேர்ப்பு விதிகள் (Associative law) எனப் பெயர்.]

நிறுவல் :

1) $A \cup (B \cup C) = \{ x \,;\, x \in A$ அல்லது $x \in (B \cup C) \}$

$= \{ x \,;\, x \in A$ அல்லது $x \in B$ அல்லது $x \in C \}$

$= \{ x \,;\, x \in (A \cup B)$ அல்லது $x \in C \}$

$= (A \cup B) \cup C$

2) $A \cap (B \cap C) = \{ x \,;\, x \in A$ மற்றும் $x \in (B \cap C) \}$

$= \{ x \,;\, x \in A$ மற்றும் $x \in B$ மற்றும் $x \in C \}$

$= \{ x \,;\, x \in (A \cap B)$ மற்றும் $x \in C \}$

$= (A \cap B) \cap C$

தேற்றம் 1.3 : கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்:

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

[இவற்றுக்குப் **பரவல் விதிகள் (Distributive law)** எனப் பெயர்.]

நிறுவல் :

1) $A \cup (B \cap C) = \{ x ; x \in A$ அல்லது $x \in (B \cap C) \}$

$= \{ x ; x \in A$ அல்லது $x \in B$ மற்றும் $x \in C \}$

$= \{ x ; x \in A$ அல்லது $x \in B$ மற்றும் $x \in A$ அல்லது $x \in C \}$

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) $A \cap (B \cup C) = \{ x ; x \in A$ மற்றும் $x \in B$ அல்லது $x \in C \}$

$= \{ x ; x \in A$ மற்றும் $x \in B$ அல்லது $x \in A$ மற்றும் $x \in C \}$

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

இதே போல

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$ எனவும்,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$ எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 1.4 : டி மார்கன் (De Morgan) தேற்றங்கள்

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ எனக் காட்டவும்.

நிறுவல் :

1) $(A \cup B)^c = \{ x ; x \in U$ மற்றும் $x \notin A \cup B \}$

$= \{ x ; x \in U$ மற்றும் $x \notin A$ $x \notin B \}$

$= \{ x ; x \in U$ மற்றும் $x \notin A$ மற்றும் $x \in U$ மற்றும் $x \notin B \}$

$= A^c \cap B^c$

2) $(A \cap B)^c = \{x ; x \in U$ மற்றும் $x \notin (A \cap B)\}$

$= \{x ; x \in U$ மற்றும் $x \notin A$ அல்லது $x \notin B\}$

$= \{x ; x \in U$ மற்றும் $x \notin A$ அல்லது $x \in U$ மற்றும் $x \notin B\}$

$= \{A^c \cap B^c\}$

டி மார்கன் தேற்றங்களைக் 'கூட்டின் நிரப்பி = நிரப்பிகளின் இடைவெட்டு' எனவும், 'இடைவெட்டின் நிரப்பி = நிரப்பிகளின் கூட்டு' எனவும் கூறலாம்.

தேற்றம் 1.5.

$A - B = A \cap B^c$ எனக் காட்டவும்.

$A - B = \{x, x \in A$ மற்றும் $x \notin B\}$

$A \cap B^c = \{x; x \in A$ மற்றும் $x \in B^c\}$

$= \{x; x \in A$ மற்றும் $x \in U$ மற்றும் $x \notin B\}$

$= \{x; x \in A$ மற்றும் $x \notin B\}$

$= A - B.$

மேற்கண்ட தேற்றங்களை 'வெண் படங்கள்' வரைந்தும் உணரலாம்.

மாதிரி 2: $A - B = A - (A \cap B)$

நிறுவல் :

$A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c \rightarrow$ தேற்றம் 5

$= A \cap (A^c \cup B^c) \rightarrow$ தேற்றம் 4

$= (A \cap A^c) \cup A \cap B^c \rightarrow$ தேற்றம் 3

$= \varphi \cup A \cap B^c$

$= A \cap B^c = A - B \rightarrow$ தேற்றம் 5

மாதிரி 3: $(A-B) \cup (A-C) = A - (B \cap C)$ எனக் காட்டவும்.

நிறுவல் :

வ.கை.ப. $= A \cap (B \cap C)^c \rightarrow$ தேற்றம் 5

$= A \cap (B^c \cup C^c) \rightarrow$ தேற்றம் 4

$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \rightarrow$ தேற்றம் 3

$= (A - B) \cup (A - C) \rightarrow$ தேற்றம் 5

= இ.கை.ப.

1.6. பெருக்கல் கணம் (Product Set)

இரண்டு கணங்கள் A, B இவற்றின் பெருக்கல் கணம் $A \times B$ கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது :

$(A \times B) = \{ (a, b) ; a \in A$ மற்றும் $b \in B \}$

$A \times B$-யின் ஒவ்வொரு பொருளிலும் முதல் உட்பொருள் A-யைச் சார்ந்ததாகவும், இரண்டாவது உட்பொருள் B-யைச் சார்ந்ததாகவும் இருத்தல் வேண்டும். இவ்விதம் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சோடிகளாக (ordered pairs) இருத்தல் வேண்டும்.

(உ-ம்.)

$A = \{ a, b, c \}$; $B = \{ x, y \}$

$A \times B = \{ (a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y) \}$

$B \times A = \{ (x, a) (x, b) (x, c) (y, a) (y, b) (y, c) \}$

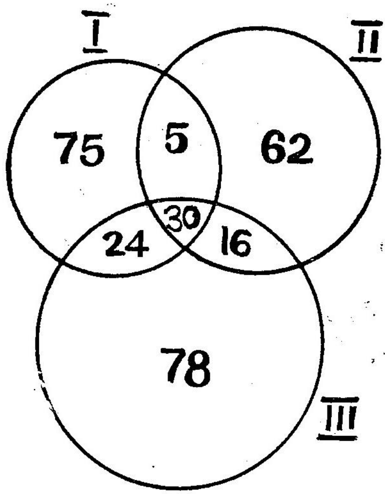
$A \times B \neq B \times A$ என்பது காணப்படுகிறது. கணக் கொள்கையின்மூலம் கீழ்க்கண்டவை போல சில நடைமுறைக் கணக்குகளைச் சுவையான முறையில் செய்யலாம்.

மாதிரி 4 : ஒரு தேர்வில் கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் காணப்பட்டன.

எல்லாப் பாகங்களிலும்	தவறியவர்கள்	:	30 பேர்
I ஆம் பாகத்தில் மட்டும்	,,	:	75 ,,
II ஆம் பாகத்தில் மட்டும்	,,	:	62 ,,
III ஆம் பாகத்தில் மட்டும்	,,	:	78 ,,
I மற்றும் II ஆம் பாகத்தில்	,,	:	35 ,,
II மற்றும் III ஆம் பாகத்தில்	,,	:	46 ,,
III மற்றும் I ஆம் பாகத்தில்	,,	:	54 ,,

மொத்தம் தவறியவர்கள் எத்தனை பேர்?

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கீழ்க்கண்ட வரிசையில் பயன் படுத்தினால் படத்திலுள்ள எல்லாப் பகுதிகளையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.



$$I \cap (II \cap III) = 30$$
$$I \cap II = 35$$
$$II \cap III = 46$$
$$III \cap I = 54$$
$$I = 75 ; II = 62 ; III = 78$$

ஆகையால் மொத்தம்

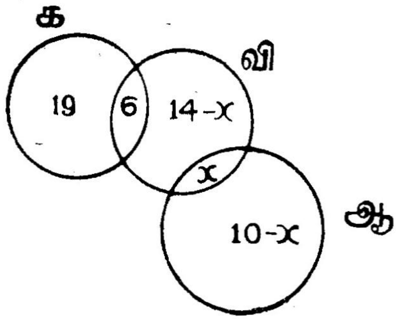
தவறியவர்கள் $= I \cup (II \cup III)$

$= 75 + 5 + 30 + 24 + 62 + 16 + 78$

$= 290$ பேர்

மாதிரி 5 : ஒரு பள்ளியில் மொத்தம் 40 ஆசிரியர்கள் உள்ள னர். இவர்களில் 25 பேர் கணிதம் கற்பிக்கிறார்கள் ; 20 பேர் விஞ் ஞானம் கற்பிக்கிறார்கள்; 10 பேர் ஆங்கிலம் கற்பிக்கிறார்கள்; 6 பேர் கணிதமும் விஞ்ஞானமும் கற்பிக்கிறார்கள். கணிதமும் ஆங்கிலமும் கற்பிப்பவர்கள் ஒருவருமில்லை. விஞ்ஞானமும் ஆங்கிலமும் கற்பிப்ப வர்கள் எத்தனை பேர்? விஞ்ஞானம் மாத்திரம் கற்பிப்பவர்கள் எத்தனை பேர்?

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து படப்பகுதிகளை எண்களால் நிரப்பலாம்.



படத்தின்படி மொத்த ஆசிரியர்
களின் எண்ணிக்கை $= 49 - x$

$= 40 \rightarrow$ கொள்கை

$$49 - x = 40$$

$$\therefore x = 9$$

விஞ்ஞானமும் ஆங்கிலமும் கற்பிப்பவர்கள் 9 பேர்.

விஞ்ஞானம் மாத்திரம் கற்பிப்பவர்கள் 5 பேர்.

1.8. சமனின்மைகளின் தீர்வுக் கணங்கள் (Solution sets of Inequalities)

சாதாரண இயற்கணிதத்தில் உள்ள சில சமனின்மைத் (inequalities) தன்மைகளைப் பயன்படுத்தி, சமனின்மைகளின் தீர்வுக் கணங்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

மாதிரி 6: $(x-1)(x+2)(-x-1) > 0$ என்ற சமனின்மையின் தீர்வுக் கணம் என்ன? அதாவது, x-ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு இந்தச் சமனின்மை உண்மையாகும்?

கீழ்க்கண்ட உண்மைகள் நமக்குத் தெரியும்:

$(x - 1) > 0$ என்றால், $x > 1$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

$(x + 2) > 0$ என்றால், $x > -2$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

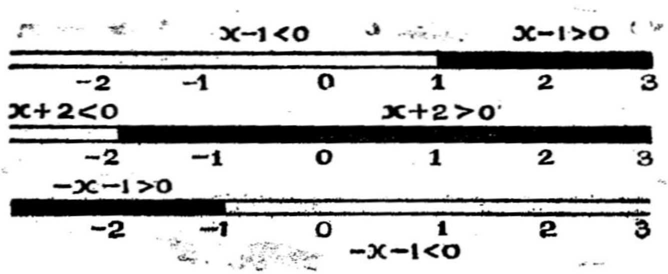
$-x - 1 > 0$ என்றால், $-x > 1$ அல்லது $x < -1$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

ஆகையால், $\{ x ; x > 1 \}$ என்ற கணம் $x - 1 > 0$ என்ற சமனின்மையின் தீர்வுக் கணம்.

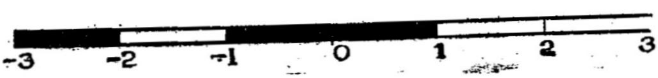
$\{x; x > -2\}$ என்ற கணம் $x+2 > 0$ என்பதன் தீர்வுக் கணம்.

$\{x; x < -1\}$ என்ற கணம் $-x-1 > 0$ என்பதன் தீர்வுக் கணம்.

இந்த மூன்று கணங்களின் படங்கள்:



$(x-1)(x+2)(-x-1) > 0$ என்ற சமனின்மைக்கு மூன்று காரணிகளும் நேராக (+ve) இருத்தல் வேண்டும் அல்லது இரண்டு காரணிகள் எதிராகவும் (−ve) ஒரு காரணி நேராகவும் இருத்தல் வேண்டும். மேலே காட்டியுள்ள படத்திலிருந்து x - ன் எந்த மதிப்புக்கும் மூன்று காரணிகளும் நேர் அல்ல என்று தெரிகிறது. $x < -2$ என்ற பகுதியிலும் $-1 < x < 1$ என்ற பகுதியிலும் இரண்டு காரணிகள் எதிராகவும் ஒரு காரணி நேராக வும் இருக்கின்றன. ஆகையால், கொடுக்கப்பட்ட சமனின்மையின் தீர்வுக் கணம் கீழே காட்டியபடி கறுப்பான பாகங்களாகும்.



மாதிரி 7:

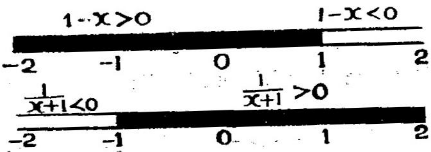
$\frac{2}{x+1} < 1$ என்ற சமனின்மையின் தீர்வுக் கணம் காண்.

$\frac{2}{x+1} < 1$; அல்லது $\frac{2}{x+1} - 1 < 0$; அல்லது $\frac{2-x-1}{x+1} < 0$;

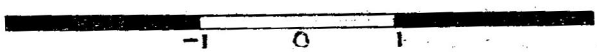
அல்லது $(1-x)\left(\frac{1}{x+1}\right) < 0$

$1-x > 0$ ஆனால், $1 > x$ அல்லது $x < 1$

$\frac{1}{x+1} > 0$ ஆனால் $x + 1 > 0$ அல்லது $x > -1$



$(1-x)\left(\frac{1}{x+1}\right) < 0$ இருக்கவேண்டுமானால் ஒரு காரணி நேராகவும், மற்றொரு காரணி எதிராகவும் இருக்கவேண்டும். படத்திலிருந்து $x < -1$ என்ற பகுதியிலும் $x > 1$ என்ற பகுதியிலும் இம்மாதிரி அமைந்திருப்பது தெரிகிறது. ஆகையால், கொடுக்கப்பட்ட சமனின்மையின் தீர்வுக் கணம் கீழே காட்டியபடி அமைந்துள்ளது.



பயிற்சி

1. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, x, y\}$ $C = \{x, z\}$ ஆனால்,
   கீழ்க்கண்ட கணங்களை எழுதுக :
   $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$
   $A - B$, $A - (B \cup C)$, $A \cup (B \cap C)$

2. P என்பது எல்லா நேர்முழு எண்களின் கணம். F, G, H கீழ்க்கண்டபடி P-யின் உட்கணங்கள்:
   $F = \{a; a \in P, a < 10\}$
   $G = \{a; a \in P, a > 5\}$
   $H = \{a; a \in P,$ a மூன்றால் வகுபடக் கூடியது. $\}$
   கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண் :
   $F \cap G$; $F \cap H$; $G \cap H$; $F \cup G$; $F \cup H$; $G \cup H$.

3. A, B என்பன இரண்டு கணங்களானால், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி:
   $A \cup A = A$; $A \cap A = A$; $A \cap B = B \cap A$.

4. A ஒரு கணம், φ ஒரு வெற்றுக் கணம். கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி:
$A \cap \varphi = \varphi$; $A \cup \varphi = A$; $A - \varphi = A$; $A - A = \varphi$.

5. $A \cap B \neq \varphi$; $B \cap C \neq \varphi$, $C \cap A \neq \varphi$, $A \cap B \cap C = \varphi$ இருக்குமாறு A, B, C-க்கு ஓர் உதாரணம் கொடு.

6. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$ என நிறுவுக.

7. $A \cap B = A$ ஆனால், $A \subset B$ என்றும்,
$A \cup B = B$ ஆனால், $A \subset B$ என்றும் நிறுவுக.

8. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

9. $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

10. கீழ்க்கண்ட சமனின்மைகளின் தீர்வுக் கணங்கள் காண்.
(1) $x^2 + 1 > 2x$ (2) $x^2 - x - 2 > 0$

11. 240 பேர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவில் 90 பேர்களுக்குத் தமிழ் மட்டும் தெரியும். 25 பேர்களுக்கு ஆங்கிலம் மட்டும் தெரியும். எவ்வளவு பேர்களுக்குத் தமிழ், ஆங்கிலம் இரண்டும் தெரியும் ?

[விடை 125]

12. ஒரு கல்லூரியிலுள்ள 100 மாணவர்களில் 30 பேர் டென்னிஸ் விளையாடுவார்கள்; 50 பேர்கள் கிரிக்கெட் விளையாடுவார்கள்; 45 பேர் ஹாக்கி விளையாடுவார்கள்; 8 பேர்கள் டென்னிசும் கிரிக்கெட்டும் விளையாடுவார்கள். 12 பேர்கள் கிரிக்கெட்டும், ஹாக்கியும் விளையாடுவார்கள். 10 பேர்கள் ஹாக்கியும் டென்னிசும் விளையாடுவார்கள். மூன்றும் விளையாடுபவர்கள் எத்தனை பேர்? [விடை 5 பேர்]

2. புதுமுறை இயற்கணிதத்தில் மற்றும் சில அடிப்படைக் கருத்துகள்

(Some More Fundamental Concepts of Modern Algebra)

சாதாரண இயற்கணிதத்தில், எண்களுடையவும் அவற்றின் மேல் செய்யப்படும் செயல்களுடையவும் (operations) தன்மைகள் பல கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளன. இத் தன்மைகளை நாம் நன்கு புரிந்துகொண்டால், எண்களுக்கு மாறுபட்ட வெக்டர், அணி (Matrix) போன்ற வேறு பொருள்களுக்கும் இத் தன்மைகள் பொருந்துகின்றனவா என்று பார்க்கலாம். மேலும், வரையறை செய்யப்படாத மூலப்பொருள்களுக்கும் சில செயல்களையும், மேற்கூறிய சில தன்மைகளையும் ஏற்றுக்கொண்டால் கிடைக்கும் முடிவுகள் என்னவென்றும் பார்க்கலாம்.

2.1. இயற்கணிதத்தில் நாம் கையாளும் பொருள்கள் மெய் எண்களும் (Real numbers), கலப்பு எண்களும் (Complex numbers) ஆகும். இவற்றின்மேல் செய்யக்கூடிய அடிப்படையான செயல்கள் இரண்டுதான். அவையாவன :

(1) கூட்டல், (2) பெருக்கல் (கழித்தலைக் கூட்டலின் சார்பாகவும், வகுத்தலைப் பெருக்கலின் சார்பாகவும் வரையறுக்கமுடியும்).

2.2. முதலில் கூட்டல் என்ற செயலை எடுத்து அதன் தன்மைகளைக் கவனிப்போம்.

1. x, y என்பன இரண்டு எண்களானல், $x+y$-யும் ஓர் எண். இதற்கு அடைப்பு விதி (Closure law) எனப் பெயர்.

2. $x+y=y+x$. இதற்குப் பரிமாற்று விதி (Commutative law) எனப் பெயர்.

3. $(x+y)+z = x+(y+z)$. இதற்குச் **சேர்ப்பு விதி (Associative law)** எனப் பெயர். இதில் வரும் மூன்று எண்களின் வரிசையை மாற்றாமல் அடைப்பை எங்கு வேண்டுமானாலும் அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

4. எந்த எண் x உடனும் 0 என்ற ஒரு விசித்திர எண்ணைக் கூட்டினாலும் x என்ற எண்ணே கிடைக்கிறது. அதாவது, $x+0 = x$. இந்த '0' என்ற எண்ணுக்குக் கூட்டலின் **முற்றொருமைப் பொருள் (Identity element)** என்று பெயர்.

5. எந்த எண் x-க்கும், $x + (-x) = 0$ என்று இருக்குமாறு '$-x$' என்ற பிரத்தியேகமான (unique) மற்றொரு எண் இருக்கிறது. இந்த எண்ணுக்குக் 'கூட்டலில் x-ன் எதிர் எண்' (Additive inverse of x) எனப் பெயர்.

6. a, b என்ற ஏதேனும் இரண்டு எண்களை எடுத்தால், $a+x=b$ என்று இருக்குமாறு a, b இவற்றுக்குத் தகுந்த x என்ற பிரத்தியேகமான தீர்வு (unique solution) இருக்கிறது. இத் தீர்வு $x=b-a$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதற்கு b, a இவற்றின் வித்தியாசம் (difference of b and a) எனப் பெயர்.

குறிப்பாக $(-a)$ என்பது '$0-a$'. அதாவது 0, a இவற்றின் வித்தியாசம் எனப்படுகிறது. '$-a$' என்று கொடுக்கப்பட்டால் $a+(-a) = 0$ என்று நாம் பொருள் கொள்ளவேண்டும். '$-a$', 'a'-யின் எதிர் எண். அதேபோல 'a', '$-a$'-யின் எதிர் எண். ஆகையால், $a = -(a)$ என்று கிடைக்கிறது.

7. $a + c = b + c$ என்று இருந்தால், $a = b$ என்ற முடிவு உண்மை. இதற்கு **நீக்கும் விதி** (Cancellation law) எனப் பெயர்.

2.3. இப்பொழுது 'பெருக்கல்' என்ற செயலை எடுத்து அதன் தன்மைகளைக் கவனிப்போம்.

1. x, y ஏதேனும் இரண்டு எண்களானால் $x.y$ என்பதும் ஓர் எண். இதற்கு **அடைப்பு விதி** (Closure law) எனப் பெயர்.

2. $x.y = y.x$. இதற்குப் **பரிமாற்று விதி (Commutative law)** எனப் பெயர்.

3. $(x.y).z = x.(y.z)$. இதற்குச் **சேர்ப்பு விதி** (Associative law) எனப் பெயர்.

4. எந்த எண் xஐயும் 1 என்ற விசித்திரமான எண்ணால் பெருக்கினால் x என்ற அதே எண் கிடைக்கிறது. அதாவது,

$x . 1 = x$. இந்த '1' என்ற எண்ணுக்குப் பெருக்கலில் முற்றொருமைப் பொருள் (Identity element) என்று பெயர்.

5. 0-வைத் தவிர எந்த எண் x-க்கும், $x . x^{-1} = 1$ என்று இருக்குமாறு x^{-1} என்ற பிரத்தியேகமான மற்றோர் எண் இருக்கிறது. இந்த எண்ணுக்குப் 'பெருக்கலில் x-ன் எதிர் எண்' (Multiplicative inverse of x) என்று பெயர்.

6. $a \neq 0$ இருக்குமாறு a, b என்ற எந்த இரண்டு எண்களை எடுத்தாலும் $a x = b$ என்று இருக்குமாறு x என்ற பிரத்தியேகமான தீர்வு எண் உள்ளது. இந்தத் தீர்வை $x = \dfrac{b}{a}$ அல்லது $b. a^{-1}$ என்று குறிக்கிறோம். இதை 'a'-யினால் 'b'-யில் ஏற்படும் ஈவு (quotient of b by a) என்றும் சொல்கிறோம்.

7. எந்த எண் x ஐ எடுத்தாலும் $x . 0 = 0$ என ஆகிறது.

8. $a . b = 0$ ஆனால், $a = 0$ அல்லது $b = 0$ அல்லது $a = b = 0$ என்பது உண்மை. இதற்கு வகுத்தல் விதி (Division law) எனப் பெயர்.

9. $a . x = b . x$, மற்றும் $x \neq 0$ என்றால் $a = b$ என ஆகிறது. இதற்கு நீக்கும் விதி (Cancellation law) எனப் பெயர்.

[நிறுவல் : $x \neq 0$ என்பதால் x^{-1} உண்டு. அதாவது $x . x^{-1} = 1$. இரண்டு பக்கங்களையும் x^{-1} ஆல் பெருக்கவும்.

$$a . x . x^{-1} = b . x . x^{-1}$$

அல்லது $a . 1 = b . 1$

அல்லது $a = b$]

10. கூட்டலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் பொதுவான கீழ்க்கண்ட விதி உண்மை.

$$a . (b + c) = a . b + a . c$$

இதற்குப் பரவல் விதி (Distributive law) எனப் பெயர். 'பெருக்கல் கூட்டலின்மேல் பரவுகிறது' என்றும் கூறலாம்.

11. m, n என்ற ஏதேனும் 2 நேர்முழு எண்களானால்,

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ போன்ற முடிவுகள் உண்மை. இவற்றுக்குப் படிக்குறி விதி (Index law) என்று பெயர்.

2.4. சமத்துவ இணைப்பு (Equivalance Relation)

எண்களுக்குள்ளும், வேறு பல கணிதப் பொருள்களுக்குள்ளும் =, <, >, ≤, ≡, |||, || போன்ற பலவிதமான இணைப்புகள் உள்ளன. உதாரணமாக எண்களுக்கிடையே, $a = b$, $a \geq b$ போன்றவையும், முக்கோணங்களுக்குள் $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$; $\triangle ABC$ ||| $\triangle DEF$ போன்றவையும், நேர் கோடுகளுக்குள் $AB \parallel CD$, $AB \perp^r CD$ போன்றவையும் உள்ளன. இந்த இணைப்புகள் பலவற்றுள் பொதுவாக மூன்று தன்மைகள் காணப்படுகின்றன. இம்மூன்று தன்மைகளும் பொருந்திய இணைப்பைப் பொதுமைப்படுத்தி அதனைச் **சமத்துவ இணைப்பு** என்கிறோம்.

வரையறை: A என்ற ஒரு கணத்தின் மூலப்பொருள்களுக்குள் கீழ்க்கண்ட மூன்று தன்மைகளும் பொருந்திய ஓர் இணைப்பு $\sim$ இருக்குமானுல் அதற்குச் **சமத்துவ இணைப்பு** எனப் பெயர்.

(1) தனக்குள் பிரதிபலித்தல் (Reflexive)

அதாவது $x \sim x, \quad x \in A$

(2) ஒன்றுக்கொன்று பிரதிபலித்தல் (Symmetric)

அதாவது $x \sim y$ ஆனுல், $y \sim x, \quad x, y \in A$.

(3) கடந்து செல்லுதல் (Transitive)

$x \sim y, \; y \sim z$ ஆனுல் $x \sim z, \quad x, y, z \in A$

உதாரணம் 1 : சமம் (=) என்ற இணைப்பை எடுப்போம். எந்த எண் xஐ எடுத்தாலும் $x = x$ என்பது உண்மை.

இது தனக்குள் பிரதிபலிக்கும் தன்மை (Reflexive property). $x = y$ என்ருல்; $y = x$ என்பது உண்மை. இது ஒன்றுக்கொன்று பிரதிபலிக்கும் தன்மை (Symmetric property). $x = y$; $y = z$ என்ருல், $x = z$ என்பது உண்மை. இது கடந்து செல்லும் தன்மை (Transitiver property). ஆகையால், 'சமம்' என்ற இணைப்பு ஒரு சமத்துவ இணைப்பு ஆகிறது.

உதாரணம் 2 : முக்கோணங்களின் முற்றொருமை (Congruence of Triangles)

(i) $\triangle ABC \equiv \triangle ABC$

(ii) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ஆனுல்,

$\triangle DEF \equiv \triangle ABC$

(iii) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, $\triangle DEF \equiv \triangle LMN$ ஆனால்,

$\triangle ABC \equiv \triangle LMN$

ஆகையால் ' $\equiv$ ' ஒரு சமத்துவ இணைப்பு.

உதாரணம் 3 : நேர்கோடுகளின் இணைதன்மை (Parallelism of straight lines)

(i) $AB \parallel AB$

(ii) $AB \parallel CD$ ஆனால், $CD \parallel AB$

(iii) $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$ ஆனால், $AB = EF$

ஆகையால் ' இணைதன்மை ' ஒரு சமத்துவ இணைப்பு ஆகிறது.

உதாரணம் 4 : சிறியது ($<$) என்னும் சம்பந்தத்தை எடுப்போம்.

$a < a$ என்பது உண்மை அன்று.

$a < b$ என்றால், $b < a$ என்பது உண்மை அன்று.

$a < b$, $b < c$ என்றால், $a < c$ உண்மை.

மூன்று தன்மைகளும் இல்லாமலிருப்பதால், இந்த இணைப்பு ஒரு சமத்துவ இணைப்பு ஆகாது.

2.5. சமத்துவக் கணம் (Equivalance Set)

A என்ற கணத்தின் மூலப்பொருள்களுள் ஒரு சமத்துவ இணைப்பு $\sim$ வரையறுக்கப்பட்டால், ஒரு மூலப்பொருள் a-யுடன், சமத்துவ இணைப்புக் கொண்ட எல்லா மூலப்பொருள்களும் சேர்ந்து $[a]$ என்ற சமத்துவக் கணம் (Equivalance set) உருவாகிறது. அதாவது,

$$[a] = \{ x ; \; x \in A, \; x \sim a \}$$

உதாரணமாக மட்டு 3-க்கு எண் முற்றொருமை (Congruence of numbers modulus 3) என்ற இணைப்பை எடுப்போம். $a \equiv b$ (மட்டு m) என்றால், 'm' ஆல் வகுக்கும்போது, a-யும் b-யும் ஒரே மீதங்களைக் கொடுக்கின்றன என்று பொருள்.

$-9, \; -6, \; -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\ldots$ என்ற எண்களில் எந்த எண் 'a'-யும், $a \equiv 0$ (மட்டு 3) என்ற தன்மையுள்ளது. ஆகையால், மேலே கூறிய எண்களாலான உட்கணத்தைச் சமத்துவக் கணம் $[0]$ எனலாம்.

$-8, \; -5, \; -2, \; 1, \; 4, 7, \ldots\ldots$ என்ற எண்களில் எந்த எண் 'b'-யும், $b \equiv 1$ (மட்டு 3) என்ற தன்மையுள்ளது. இந்த எண்

களாலான உட்கணம் சமத்துவக் கணம் [1] எனப்படுகிறது. இதேபோல -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, ... போன்ற எண்களில் எந்த எண் c-யும் $c \equiv 2$ (மட்டு 3) என்ற தன்மையுள்ளது. இந்த எண்களாலான உட்கணம் சமத்துவக் கணம் [2] எனப்படும்.

முழுஎண் கணத்தில் எந்த எண்ணும் மேற்கூறிய, [0], [1], [2] என்ற மூன்று உட்கணத்தில் ஏதாவது ஒன்றில்தான் இடம்பெறுகிறது. இந்த மூன்று கணங்களில் எந்த இரண்டுக்கும் பொதுவான எண் கிடையாது என்பதையும் இம் மூன்றும் சேர்ந்து எல்லா முழு எண்களின் கணமும் உண்டாகிறது என்பதையும் உணரலாம்.

2.6. சமத்துவக் கணங்கள் பற்றிய சில உண்மைகள் புலனாகின்றன.

(1) $a \sim b$ என்றால் $[a] = [b]$ என ஆகிறது.

நிறுவல் :

$a \sim b \rightarrow$ கொள்கை

$x \in [a]$ என்க. $\therefore x \sim a$. $a \sim b$ என்பதால் $x \sim b$.

ஆதலால் $x \in [b]$. ஆதலால் $[a] \subset [b]$.

$y \in [b]$ என்க. $\therefore y \sim b$.

$a \sim b$ என்பதால் $b \sim a$. ஆதலால், $y \sim a$. ஆதலால் $y \in [a]$. ஆதலால் $[b] \subset [a]$. ஆதலால் $[a] = [b]$.

(2) A-யின் ஒவ்வொரு மூலப்பொருளும் ஒரே ஒரு சமத்துவக் கணத்துக்குத்தான் சொந்தமாகும்.

நிறுவல் :

$x \in [a]$ மற்றும் $x \in [b]$ என்க. ஆதலால் $x \sim a$ மற்றும் $x \sim b$ என ஆகிறது. ஆதலால் $a \sim b$ எனக் கிடைக்கிறது.

[1]-ன்படி $[a] = [b]$ என ஆகிறது. ஆதலால் $[a]$, $[b]$ இரண்டும் ஒரே கணமாகின்றன. ஆதலால் x, ஒரு சமத்துவக் கணத்துக்குத்தான் சொந்தமாகும்.

(3) $[a] \cap [b] = \varphi$ ஆனால் $a \nsim b$ என இருத்தல் வேண்டும்

நிறுவல் :

$[a] \cap [b] = \varphi$ என்க. முடிந்தால் $a \sim b$ என இருக்கட்டும். $a \sim b$ என்பதால் [1]-ன்படி $[a] = [b]$.

இது கொள்கைக்கு முற்றிலும் மாறானது.

ஆகையால் $a \nsim b$.

2.7 வரைதல்கள் (Mappings)

A என்ற கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலப்பொருள் 'a'-க்கும் தகுந்த a' என்ற ஒரே ஒரு மூலப்பொருள் B-என்ற மற்றொரு கணத்தில் இருக்குமானால், 'A' என்ற கணம் B என்ற கணத்துக்குள் வரையப் பட்டுள்ளது (A is mapped into B) எனப்படுகிறது. மேலும் $a \to a'$ என்றும் குறிக்கப்படுகிறது. இதில் a', a-யின் பிம்பம் (image).

உதாரணம்: A என்ற கணம் ஒரு நூல்நிலையம் என்க. B என்பது நேர்முழு எண்களின் கணம் (set of positive integers) என்க. A-யைச் சார்ந்த ஒவ்வொரு புத்தகத்துக்கும் தகுந்த அதன் பக்கங் களின் கூடுதலைக் குறிக்கும் ஒரு முழு எண் B-யில் காணப்படு கிறது. ஆகையால், A என்ற கணம் B என்ற கணத்துக்குள் வரையப் பட்டுள்ளது (A is mapped into B) என்கிறோம்.

இவ்வித வரைதல்களின் சில வகைகள் உண்டு. அவையாவன:

(1) உள்வரைதல் (Into mapping)

(2) மேல்வரைதல் (Onto mapping)

(3) ஒன்றுக்கொன்றாக வரைதல் (One-one mapping)

(1) **உள்வரைதல்:** மேலே பொதுவாக வரையறுக்கப்பட்ட 'வரைதலும்', நூல்நிலைய உதாரணமும் 'உள்வரைதலை'க் குறிக் கின்றன. உள்வரைதலுக்கு மற்றுமோர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம். N என்பது ஆங்கிலத்திலுள்ள ஒரு தொலைபேசிப் பெயர்ப்பட்டியல் (Telephone directory). ஆங்கிலத்திலுள்ள 26 எழுத்துகளை மாத்திரம் கொண்ட ஒரு கணத்தை L என்க. N-ல் உள்ள ஒவ்வொரு பெயருக்கும் தகுந்தாற்போல் அதன் முதல் எழுத்தைக் குறிக்கும் எழுத்து L-ல் காணப்படுகிறது. இத் தொடர்பை (correspondence) N என்ற கணம் B-க்குள் வரையப்பட்டது' என்று கூறலாம்.

[குறிப்பு: பெயர்ப் பட்டியலில் சில எழுத்துகளில் ஆரம்பிக்கும் பெயர்கள் இல்லாமலே இருக்கலாம். ஒரே எழுத்தில் ஆரம்பிக்கும் பல பெயர்கள் இருக்கலாம்.]

(2) **மேல்வரைதலின் வரையறை (Definition of onto mapping):** B-யிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலப்பொருளையும் பிம்பமாகக் கொண்ட மூலப் பொருள் குறைந்த அளவு ஒன்றாவது A-யில் இருந்தால் A, B-யின் **மேல்** வரையப்பட்டுள்ளது எனப்படுகிறது.

உதாரணம்: மேற்கூறிய தொலைபேசிப் பெயர்ப்பட்டியல் உதார ணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். A யிலிருந்து Zவரை உண்டான 26

எழுத்துகளிலும் ஆரம்பிக்கும் பெயர்கள் இனத்துக்கு ஒன்ருகிலும் இருந்தால், L-ல் உள்ள ஒவ்வோர் எழுத்தையும் பிம்பமாக உடைய பெயர் ஒன்ருவது N-ல் இருக்கும். ஆகையால் N, 'L'-ன்மேல் வரையப்பட்டுள்ளது.

(3) **ஒன்றுக்கொன்ருக வரைதலின் வரையறை** (Definition of one-one mapping): A என்ற கணம் B என்ற கணத்தின்மேல் வரையப்பட்டதாயும், A-யின் வெவ்வேறு மூலப்பொருள்களுக்கும், B-யில் வெவ்வேறு பிம்பங்களும் இருந்தால், A, B-யின் **மேல் ஒன்றுக் கொன்ருக** வரையப்பட்டுள்ளது எனப்படும். இவ்வித வரைதலை **ஒன்றுக்கொன்ருன பிரத்தியேகத் தொடர்பு** (Bi-unique correspondence) என்றும் கூறுகிரேம்.

உதாரணம் : மேலே கூறிய பெயர்ப்பட்டியல் உதாரணத்தை எடுப்போம். A-யிலிருந்து Z வரை உள்ள ஒவ்வோர் எழுத்திலும் ஆரம்பிக்கும் பெயர்கள் இனத்துக்கு ஒன்றுமட்டும் இருப்பதாக வைப்போம். இப்பொழுது 'L'-ல் உள்ள ஒவ்வோர் எழுத்தையும் பிம்பமாக உடைய ஒரு பெயராவது N-ல் உள்ளது. மேலும் N-ல் உள்ள வெவ்வேறு பெயருக்கும் 'L'-ல் வெவ்வேறு பிம்பமும் உள்ளது. ஆகையால், இது ஓர் **ஒன்றுக்கொன்ருன வரைதல் ஆகும்.**

2.8. மேற்கூறிய வரைதல்களுக்கு மேலும் சில உதாரணங்களைப் பார்ப்போம் :

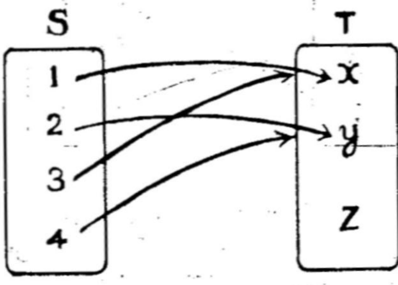
உள்வரைதல் (Into mapping)

$$S = \{ 1, 2, 3, 4 \} ; \quad T = \{ x, y, z \}$$

பொருளும் பிம்பமும் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கட்டும்.

$$1 \rightarrow x; \ 2 \rightarrow y; \ 3 \rightarrow x; \ 4 \rightarrow y$$

இப்பொழுது S, T-க்குள் வரையப்பட்டுள்ளது.



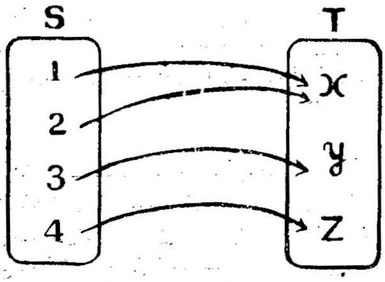
படம் 1

[இதில், z ஐப் பிம்பமாக உடைய பொருள் ஒன்றும் S-ல் இல்லை என்பதையும், xஐப் பிம்பமாக உடைய பொருள்கள் S-ல் இரண்டு இருப்பதையும் கவனிக்கவும்.]

மேல்வரைதல் (Onto mapping)

$$S = \{1, 2, 3, 4\}; \quad T = \{x, y\ z\}$$

$1 \to x$; $2 \to x$; $3 \to y$; $4 \to z$ என்று கொள்வோம்.



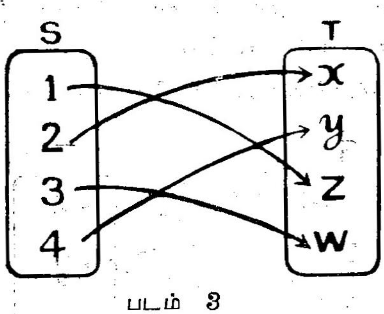
படம் 2

[இதில், T-ல் உள்ள ஒவ்வொரு பொருளையும் பிம்பமாக உடைய பொருள் S-ல் குறைந்த அளவு ஒன்றுவது இருக்கிறது. ஆகையால், இது ஒரு **மேல்வரைதல்** ஆகும்.

ஒன்றுக்கொன்றாக வரைதல் (One-one mapping)

$$S = \{1, 2, 3, 4\}; \quad T = \{x, y, z, w\}$$

$1 \to z$ $2 \to x$, $3 \to w$, $4 \to y$ என்க.



படம் 3

T-யிலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளையும் பிம்பமாகக் கொண்ட பொருள் S-ல் ஒன்றுவது இருக்கிறது. S-ன் வெவ்வேறு பொருள்களுக்கு T-ல் வெவ்வேறு பிம்பங்கள் இருக்கின்றன. ஆகையால் இது ஒன்றுக்கொன்றான வரைதல் ஆகும்.

2.9. ஒரு கணத்தை அதே கணத்துக்குள்ளாகவோ, அல்லது அதன் மேலேயோ வரையலாம் (A set can be mapped into or onto itself)

உதாரணமாக,

$$A = \{x, y, z, w\}$$

$x \rightarrow w,\ y \rightarrow w,\ z \rightarrow y,\ w \rightarrow x$ என்று இருந்தால், A தனக்குள்ளேயே வரையப்பட்டதாகும்.

$y \rightarrow x,\ z \rightarrow y,\ w \rightarrow z,\ x \rightarrow w$ என்று கொள்வோம். x, y, z, w இவற்றைப் பிம்பமாக உடைய பொருள்கள் A-ல் ஒன்றுவது இருக்கிறது. ஆகையால் இது, A தனக்கு மேலேயே வரையப்பட்டதாகும்.

2.10. இரட்டைப் பொருள் செயல்கள் (Binary operations)

A என்பது ஒரு கணம் என்க. A-யைச் சார்ந்த, (a, b) என்று வரிசைப்படுத்தப்பெற்ற a, b என்ற ஏதேனும் இரண்டு மூலப்பொருள்களின் சேரடியை (ordered pair) $a \circ b$ என்ற, A-யைச் சார்ந்த ஒரு பிரத்தியேகமான மூலப்பொருளுடன் இணைக்கும் செயலுக்கு ஓர் இரட்டைப் பொருள் செயல் (Binany operation) என்று பெயர்.

உதாரணமாக, I ஒரு நேர்முழு எண்களின் கணம் என்க. சாதாரணக் கூட்டல் அல்லது சாதாரணப் பெருக்கல் ஓர் இரட்டைப் பொருள் செயலாகும்.

$7 \circ 8 = 7 + 8$ என்று கொண்டால்,

$7 \circ 8 = 15$ ஆகிறது.

$7 \circ 8 = 7 \times 8$ என்று கொண்டால்,

$7 \circ 8 = 56$ என்றுகிறது.

15, 56 என்றவையும் I-யைச் சார்ந்தன என்பதைக் கவனிக்கவும்.

'$\circ$' என்ற செயல் சில சமயம் கூட்டலென்றும், சில சமயம் பெருக்கலென்றும் குறிக்கப்படும். ஆனால், எப்பொழுதும் இவற்றைச் சாதாரணக் கூட்டல், சாதாரணப் பெருக்கல் என்று கொள்ளக் கூடாது. பொருள்களைப் பொறுத்துக் 'கூட்டல்' என்றால் என்ன, பெருக்கல் என்றால் என்ன என்று ஆங்காங்கே வரையறை செய்யப் படவேண்டும்.

2.11. வரிசைமாற்றங்கள் (Permutations)

A என்ற கணம் தன்மேலேயே ஒன்றுக்கொன்றாக வரையப்பட்டால் இந்த வரைதலுக்கு வரிசை மாற்றம் (Permutation) எனப் பெயர்.

உதாரணம் : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. பிம்பங்களைப் பின்வருமாறு எடுப்போம்.

$1 \to 3,\ 2 \to 5,\ 3 \to 1,\ 4 \to 2,\ 5 \to 4$ இந்த வரைதலைக் கீழ்க்கண்டவாறும் குறிப்பதுண்டு.

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{Bmatrix}$$

இந்த வரைதல், A, தன்மேலேயே ஒன்றுக்கொன்றாக வரையப் பட்டதாகும். ஆகையால், இது ஒரு வரிசைமாற்றும் செயல் **(permutation)** ஆகும். இச் செயலை 'α', 'β' போன்றவற்றால் குறிப்ப துண்டு. இதைப் போல மேற்கூறிய A என்ற கணத்தில் மொத்தம் $5p_5 = \lfloor 5 = 120$ வரிசைமாற்றங்கள் ஏற்படலாம் என்பதை உணரலாம். இந்த 120 வரிசைமாற்றங்களும் ஒரு கணமாகின்றன **(A set of permutations)**.

இந்தக் கணத்தில் α, β என்ற இரண்டு மூலப்பொருள்களை எடுப்போம். உதாரணமாக,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

என்று இருக்கட்டும். இவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறும் குறிக்கலாம் :

$$1\alpha = 3;\ 2\alpha = 5;\ 3\alpha = 1;\ 4\alpha = 2;\ 5\alpha = 4;$$

$$1\beta = 5;\ 2\beta = 1;\ 3\beta = 2;\ 4\beta = 3;\ 5\beta = 4$$

இந்த இரண்டு வரிசைமாற்றங்கள் α, β இவற்றின் பெருக்கல் என்னவென்று பார்ப்போம்.

$$1(\alpha\beta) = (1\alpha)\beta = 3\beta = 2$$

$$2(\alpha\beta) = (2\alpha)\beta = 5\beta = 4$$

$$3(\alpha\beta) = (3\alpha)\beta = 1\beta = 5$$

$$4(\alpha\beta) = (4\alpha)\beta = 2\beta = 1$$

$$5(\alpha\beta) = (5\alpha)\beta = 4\beta = 3$$

ஆகையால், $\alpha\beta = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{Bmatrix}$ என ஆகிறது.

$\alpha\beta$ என்ற பெருக்கற் பலனைக் கண்டுபிடிக்கக் கீழ்க்கண்ட முறையையும் பின்பற்றலாம்.

முதலில்,

$$\alpha\beta = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$$

என்று எழுதுவோம். பிறகு முதல் அடைப்பில் 1-ன் பிம்பம் 3 என்றும், இரண்டாவது அடைப்பில் 3-ன் பிம்பம் 2 என்றும் தெரிகிறது. ஆகையால், பெருக்கற் பலனில் 1-ன் பிம்பம் 2 ஆகிறது. இதேபோல் '2'-ன் பிம்பம் 4 ஆகிறது. இவ்வாறே கண்டுபிடித்து,

$$\alpha\beta = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{Bmatrix}$$ என்று எழுதிவிடலாம்.

$(\beta\alpha)$ என்னவென்று பார்ப்போம்.

$$(\beta\alpha) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

இதனால் $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ எனத் தெரிகிறது. ஆகையால், பெருக்கலில் வரிசை (order) மிகவும் முக்கியமாகும். இதே போல α^2, β^2, $\alpha\beta^r$, $\alpha^2\beta^r$ போன்ற எந்தப் பெருக்கற் பலனும் கண்டுபிடிக்கலாம். எந்தப் பெருக்கற் பலனும் முதலில் சொன்ன 120 வரிசைமாற்றங்களில் ஒன்றுதான்.

2.12. சமச்சீர்க் குலம் S_n (Symmetric Group S_n)

ஒரு கணத்தில் வெவ்வேறான n மூலப்பொருள்கள் இருந்தால் இவற்றில் $\underline{|n}$ வரிசைமாற்றங்கள் (permutations) உண்டு. இந்த $\underline{|n}$ வரிசைமாற்றங்களும் ஒரு குலத்தைச்[1] (group) சேர்ந்தன. இந்தக் குலத்துக்கு $\underline{|n}$ வரிசை எண் உடைய சமச்சீர்க் குலம் S_n (Symmetric group S_n) என்று பெயர். இந்தக் குலத்தின் எந்த இரண்டு பொருள்களின் பெருக்கற் பலனும் இதே குலத்தின் வேறு ஒரு பொருளாக இருக்கிறது என்பதை மேலே பார்த்தோம்.

இந்தக் குலத்தில், $$\epsilon = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & \ldots & n \end{Bmatrix}$$

என்ற பொருளும் உண்டு. இந்த வரிசைமாற்றத்துக்கு முற்றொருமை வரிசைமாற்றம் (Identity permutations) என்றுபெயர்.

[1] குலம் என்ற சிறப்பான கணம் அடுத்த அத்தியாயத்தில் விளக்கப்படுகிறது.

2.13. சுழல் வரிசைமாற்றம் (Cyclic Permutation)

$A = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots a_k, a_{k+1}, \ldots a_n \}$ என்க.

'α' என்ற வரிசைமாற்றம் கீழ்க்கண்ட பிம்பங்களைக் கொடுப்பதாக வைப்போம்.

$a_1 \to a_2$; $a_2 \to a_3$; $a_3 \to a_4$; $a_4 \to a_5$ ………

$a_{k-1} \to a_k$; $a_k \to a_1$, $a_{k+1} \to a_{k+1}$, $a_{k+1} \to a_{k+2}$, ……

$a_n \to a_n$. இப்படி இருந்தால் 'α'-க்கு k நீளமுள்ள **சுழல்வரிசை மாற்றம்** எனப் பெயர். இந்தச் சுழல்வரிசை மாற்றத்தைக் கீழ்க்கண்ட விதமாகவும் குறிக்கலாம்.

$$\alpha = \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} \ldots\ldots & a_n \\ a_2 & a_3 \ldots\ldots & a_k & a_1 & a_{k+1} \ldots\ldots & a_n \end{Bmatrix}$$

சுழல்வரிசை மாற்றத்தை இன்னும் சுருக்கமாகக் கீழ்க்கண்ட வாறுதான் பெரும்பாலும் எழுதுவோம்.

$\alpha = (a_1\ a_2\ a_3 \ldots \ldots a_k)$. இதன் பொருள் a_1, a_2 ஆகவும், a_2, a_3 ஆகவும். ……; a_{k-1}, a_k ஆகவும், a_k, a_1 ஆகவும் மாறுகின்றன வென்றும் மற்றவற்றில் மாறுதல்கள் இல்லை என்றும் ஆகிறது.

தேற்றம் 2.1.

α என்பது k நீளமுள்ள ஒரு சுழல்வரிசை மாற்றமானால் $\alpha^k = \epsilon$.

நிறுவல் :

$\alpha = (a_1\ a_2\ a_3 \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\ a_k)$

$a_1\ \alpha = a_2$; $a_1 \alpha^2 = (a_1\ \alpha)\ \alpha = a_2\ \alpha = a_3$;

$a_1\ \alpha^3 = (a_1 \alpha^2)\ \alpha = a_3\ \alpha = a_4$. இதேபோல

$a_1\ \alpha^k = a_1$ என ஆகிறது.

α-வை $(a_2\ a_3\ a_4) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots a_k, a_1$ என்றும் எழுதலாம். ஆகையால், $a_2\ \alpha^k = a_2$ என நிருபிக்கலாம்.

இதேபோல

$a_i\ \alpha^k = a_i\ (i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots k)$ எனக் காட்டலாம். ஆகையால் $\alpha^k = \epsilon$ என ஆகிறது.

(உ-ம்.) $\alpha = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{Bmatrix}$ என எடுப்போம்.

இது 3 நீளமுள்ள ஒரு சுழல்வரிசை ஆகும்.

$$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha = \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}\right\}$$

$$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}\right\} = \epsilon$$

தேற்றம் 2.2.

சுழல் வரிசைமாற்றமில்லாத ஒரு வரிசைமாற்றத்தை ஒன்றுக்கொன்று பொது இல்லாத (disjoint) பல சுழல்வரிசை மாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம்.

முதலில் இந்த முடிவை ஒரு சிறிய உதாரணத்தில் சரிபார்த்துப் பிறகு பொது நிரூபணம் கொடுப்போம்.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$1_\alpha = 3; \quad 3_\alpha = 4; \quad 4_\alpha = 2; \quad 2_\alpha = 1$$

ஆகையால், இப் பகுதி ஒரு 4-நீளமுள்ள சுழல்வரிசையாகிறது. அதாவது $\beta = (1\ 3\ 4\ 2)$. பிறகு $5_\alpha = 6$; $6_\alpha = 5$ என ஆகிறது. இதை $\gamma = (5\ 6)$ என எழுதலாம்.

$$\beta\gamma = \left\{\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{matrix}\right\} = \alpha$$

ஆகையால் $\alpha = (1\ 3\ 4\ 2)\ (5\ 6)$ என ஆகிறது.

பொது நிறுவல்: $a_1\alpha \neq a_1$ என்று இருக்கும் இந்தப் பொருளை a_1-லிருந்து ஆரம்பிப்போம். $a_1\alpha = a_2$; $a_2\alpha = a_3$; $a_3\alpha = a_4$ ... ... என்று இருக்கட்டும். $a_k\alpha$ என்று ஒரு கட்டத்

துக்கு வரும்போது, $a_k\alpha$ என்பது $a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_{k-1}$ இவற்றில் ஒன்றாக இருக்கமுடியாது. ஏனென்றால், இவை வேறு பொருள்களின் பிம்பங்கள். ஆகையால், $a_k\alpha = a_1$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். ஆகையால், இப்பகுதியை $(a_1\ a_2 \ldots\ldots\ldots a_k)$ என்று குறிக்கலாம். மீதியுள்ள பொருள்களில் $b_1\alpha \neq b_1$ என்ற பொருளிலிருந்து ஆரம்பித்து $(b_1\ b_2 \ldots\ldots\ldots b_l)$ என்ற சுழல்வரிசையைக் கண்டுபிடிக்கலாம். தங்கள் மேலேயே வரைந்துகொள்ளாத பொருள்கள் எல்லாவற்றையும் மேற்கண்டவாறு தொகுத்துவிட்டால்,

$$x = (a_1\ a_2 \ldots\ldots a_k)\ \ (b_1\ b_2 \ldots\ldots b_l)$$

என்று எழுத முடியும்.

2.14. பரிமாற்றம் (Transposition)

2-நீளமுள்ள ஒரு சுழல்வரிசைக்குப் பரிமாற்றம் (transposition) என்று பெயர். அதாவது ஒரு பரிமாற்றத்தில் இரண்டு பொருள்கள் மாத்திரம் இடம் மாற்றிக் கொள்கின்றன. மற்றப் பொருள்கள் இடம் மாறுவதில்லை.

(உ-ம்.)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ என்பது ஒரு பரிமாற்றம். இது 2-நீளமுள்ள சுழல்வரிசை மாற்றம் $(2\ \ 4)$ என்பதை உணரலாம்.

தேற்றம் 2.3.

எந்த ஒரு சுழல்வரிசை மாற்றத்தையும் பரிமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம்.

$\alpha = (a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots\ldots a_k)$ என்க.

$(a_1\ a_k)\ (a_2\ a_k)\ (a_3\ a_k)\ (a_4\ a_k) \ldots\ldots\ (a_{k-1}\ a_k)$ என்ற பரிமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனை எடுப்போம். முதல் அடைப்பிலிருந்து $a_1 \rightarrow a_k$ என்றும், இரண்டாவது அடைப்பிலிருந்து $a_k \rightarrow a_2$ என்றும், பிறகு a_2 என்பதே வரவில்லை என்றும் பார்க்கிறோம். ஆகையால், பெருக்கற் பலனில் $a_1 \rightarrow a_2$ என ஆகிறது. இதேபோல $a_2 \rightarrow a_3$, $a_3 \rightarrow a_4$, ... $a_{k-1} \rightarrow a_k$ என ஆகிறது. முதல் அடைப்பில் $a_k \rightarrow a_1$ என்றும், பிறகு a_1 வரவில்லையாதலால் $a_k \rightarrow a_1$ என்றும் முடிவாகிறது. ஆகையால், மேற்கூறிய பெருக்கற் பலன் $(a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots\ a_k)$ என்ற சுழல்வரிசை மாற்றத்துக்குச் சமம் எனப் பார்க்கிறோம்.

தேற்றம் 2.4.

எந்த ஒரு வரிசைமாற்றத்தையும் பரிமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம்.

நிறுவல் : தேற்றம் 2.2-ன்படி எந்த ஒரு வரிசைமாற்றத்தையும் சுழல்வரிசை மாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம் எனப் பார்த்தோம். தேற்றம் 2·3-ன்படி, எந்தச் சுழல்வரிசை மாற்றத்தையும் பரிமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம் எனப் பார்த்தோம். இந்த இரண்டு முடிவுகளையும் ஒன்றுசேர்த்தால் 4ஆவது தேற்றத்தின் முடிவு புலனாகிறது.

(உ-ம்.)

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 \end{Bmatrix}$$ என்ற வரிசைமாற்றத்தைப் பரிமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாக எழுதவும்.

$$1\alpha = 3;\quad 3\alpha = 6;\quad 6\alpha = 5;\quad 5\alpha = 1;$$
$$2\alpha = 4;\ 4\alpha = 7;\quad 7\alpha = 2.$$

ஆகையால் $\alpha = (1\ 3\ 6\ 5)\ \ (2\ 4\ 7)$ என ஆகிறது.

$(1\ 3\ 6\ 5) = (1 5)\ (3 5)\ (6 5)$ என எழுதலாம்.

$(2 4 7) = (2\ 7)\ (4\ 7)$ என எழுதலாம்.

ஆதலால் $\alpha = (15)\ (35)\ (65)\ (27)\ (47)$ என ஆகிறது.

2.15. ஒரு வரிசைமாற்றத்தைப் பலவகைகளில் பரிமாற்றங்களின் பெருக்கலாகக் கூறலாம்.

(உ-ம்.) $(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)\ (2\ 4)\ (3\ 4)$

$= (1\ 3)\ (2\ 4)\ (3\ 4)\ (1\ 2)\ (2\ 4)$

மேலும், ஒரு பரிமாற்றத்தின் வர்க்கம், முற்றொருமை வரிசைமாற்றமாகையால், அதாவது $(ij)\ (ij) = \epsilon$ என்பதால், எந்தப் பரிமாற்றங்களின் பெருக்கலிலும் இதுபோன்ற பரிமாற்றச் சோடிகளை சேர்க்கலாம்.

(உ-ம்.) $(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)\ (2\ 4)\ (3\ 4)\ (2\ 3)\ (2\ 3)$

தேற்றம் 2.5.

ஒரு வரிசைமாற்றத்தை எந்த வகையில் பரிமாற்றங்களின் பெருக்கலாகக் கூறினாலும், பரிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டையாகவோ அல்லது ஒற்றையாகவோ இருக்கும்.

நிறுவல் : n வரிசை எண் உடைய முற்றொருமை வரிசைமாற்றத்தை எடுப்போம்.

$$\text{அதாவது } \epsilon = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots\ldots n \\ 1\ 2\ 3 \ldots\ldots n \end{pmatrix}$$

இதற்குத் தகுந்தாற்போல் $P\epsilon$ என்ற ஒரு கோவையைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்:

$$P\epsilon = \underset{i<j}{\pi} (x_i - x_j) \quad i \cdot j = 1, 2, \ldots n \quad (i < j)$$

(உ-ம்.) $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ என்றால்,

$$P\epsilon = (x_1 - x_2)\ (x_1 - x_3)\ (x_1 - x_4)$$
$$\times\ (x_2 - x_3)\ (x_2 - x_4)\ (x_3 - x_4)$$

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ 1_\alpha & 2_\alpha & 3_\alpha \ldots\ldots\ldots n_\alpha \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

$P\alpha = \underset{i<j}{\pi} (x_{i\alpha} - x_{j\alpha})$ என ஆகிறது.

(உ-ம்.) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ என்க.

$$P\alpha = (x_4 - x_1)\ (x_4 - x_2)\ (x_4 - x_3)$$
$$\times\ (x_4 - x_2)\ (x_1 - x_3)\ (x_2 - x_3)$$

ϵ-ல் $(k\ l)$ என்ற பரிமாற்றத்தைச் செய்வோம். அதாவது,

$\delta = (k\ l)$. இதில் $k < l$ எனக் கொள்வோம்.

$P\epsilon$-ல் உள்ள $(x_k - x_l)$ என்ற காரணி

$P\delta$-ல் $(x_l - x_k)$ என மாறுகிறது.

$i < k$ என இருக்கும்பொழுது $(x_i - x_k)$, $(x_i - x_l)$ என்ற காரணிகள் மாறுவதில்லை.

$i < l$ என இருக்கும்பொழுது $(x_k - x_i)$, $(x_l - x_i)$ என்ற காரணிகளும் மாறுவதில்லை.

$k < i < l$ என இருக்கும்பொழுது $(x_k - x_i)$ என்பது $(x_i - x_k)$ என்றும், $(x_i - x_l)$ என்பது $(x_l - x_i)$ என்றும் மாறுகின்றன.

இவ்விதச் சோடிகளாகச் சேர்க்கலாம் ஆகையால், இச் சோடிகளின் பெருக்கற் பலனில் திசைமாற்றம் இல்லை. ஆகையால், ஒரு பரிமாற்றத்தால், ஒரு திசைமாற்றம் மாத்திரம் ஏற்படுகிறது. ஆகையால், α என்ற வரிசைமாற்றம் r பரிமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாக இருந்தால், $P_\alpha = (-1)^r P\epsilon$ எனக் கிடைக்கிறது. α-வை r பரிமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாகவும், s பரிமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாகவும் கூறினால், $P_\alpha = (-1)^r P\epsilon = (-1)^s P\epsilon$ எனக் கிடைக்கும். $(-1)^r P\epsilon = (-1)^s P\epsilon$ என இருப்பதால் r, s

இரண்டும் இரட்டையாகவோ அல்லது ஒற்றையாகவோ இருத்தல் அவசியம்.

2.16. இரட்டை மற்றும் ஒற்றை வரிசைமாற்றம் (Even and cdd permutations)

வரையறை: ஒரு வரிசைமாற்றத்தைப் பரிமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனாக எழுதும்போது பரிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டையாகவோ ஒற்றையாகவோ இருக்குமானால், அந்த வரிசைமாற்றத்துக்கு இரட்டை அல்லது ஒற்றை வரிசை மாற்றம் எனப் பெயர்.

தேற்றம் 2.5.

n மூலப்பொருள்கள் உள்ள ஒரு கணத்தில் உண்டாகும் $\underline{|n}$ வரிசைமாற்றங்களில் $\frac{\underline{|n}}{2}$ இரட்டை வரிசைமாற்றங்களும் $\frac{\underline{|n}}{2}$ ஒற்றை வரிசை மாற்றங்களும் உள்ளன.

நிறுவல்: இரட்டை வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை r ஆகவும், ஒற்றை வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை s ஆகவும் இருக்கட்டும். $\therefore\ r+s=\underline{|n}$ என ஆகிறது. ஓர் இரட்டை வரிசைமாற்றத்தை எடுத்து அதில் ஒரு பரிமாற்றத்தைச் செய்தால் அது ஒற்றை வரிசைமாற்றமாக மாறுகிறது. இதே போல r இரட்டை வரிசை மாற்றங்களையும், ஒற்றை வரிசைமாற்றங்களாகச் செய்யவும். இந்த 'r' ஒற்றை வரிசைமாற்றங்கள் முதலில் கருதிய 's' ஒற்றை வரிசை மாற்றங்களின் ஒரு பகுதியாகவோ அதே s மாற்றங்களாகவோ இருத்தல் வேண்டும்.

$\therefore\quad r \leq s$ என ஆகிறது. (1)

இதேபோல s ஒற்றை வரிசைமாற்றங்களையும் எடுத்து, அவை ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு பரிமாற்றம் செய்து இரட்டை வரிசைமாற்றங்களாகச் செய்வோம். இதனால் $s \leq r$ என ஆகிறது. (2)

(1), (2) இவற்றிலிருந்து $r = s$ என ஆகிறது.

$r + s = \underline{|n}$ என்பதால்

$r = s = \frac{1}{2}\underline{|n}$ எனக் கிடைக்கிறது.

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட இணைப்புகள் 'சமத்துவ இணைப்புகள்' எனக் காண்பிக்கவும் :

(1) பல முடிவுள்ள (finite) கணங்களின் தொகுப்பில் 'ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள மூலப்பொருள்களைக் கொண்டது' என்கிற இணைப்பு.

(2) நேர்முழு எண்களின் கணத்தில் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட இரண்டு சோடிகள் (x, y); (u, v), $xv = yu$ என்று இருக்குமானல், $(x, y) = (u, v)$ என்கிற இணைப்பு.

(3) முழுஎண் கணத்தில் 'm' ஆல் வகுபடும்பொழுது x, y என்ற எண்கள் ஒரே மீதங்களைக் கொடுத்தால் $x \equiv y$ (மட்டு m) என்கிற இணைப்பு.

2. I என்பது முழு எண்களின் கணம். $i \in I$. I தனக்குள்ளேயே கீழ்க்கண்ட விதங்களில் வரையப்படுகிறது. இவற்றில் எவை 'உள்வரைதல்கள்', எவை 'மேல்வரைதல்கள்', எவை 'ஒன்றுக்கொன்றுன வரைதல்கள்' எனக் கூறுக.

1) $i \to i + 3$	2) $i \to i^2 + i$
3) $i \to i^3$	4) $i \to 2i - 1$
5) $i \to -i + 5$	6) $i \to i - 4$

மாதிரி விளக்கம்

1) $i + 3 = i'$ என்க. $\therefore i = i' - 3$. i' என்கிற ஒவ்வொரு முழு எண்ணையும் பிம்பமாகவுடைய பிரத்தியேகமான i என்ற ஒரு முழு எண் உள்ளது. ஆகையால், இது 'ஒன்றுக்கொன்றுன' வரைதல் ஆகும்.

2) $i^2 + i = i'$ என்க. $\therefore\ i^2 + i - i' = 0$

$$\therefore\ i = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4i'}}{2}$$

i' என்ற எந்த முழு எண்ணையும் பிம்பமாக உடைய i என்ற முழு எண் இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை. ஆகையால், இது ஒரு 'மேல் வரைதல்' ஆகாது. ஆனால், ஒவ்வொரு i-க்கும் தகுந்த i' என்ற பிரத்தியேகமான ஒரு முழு எண் உள்ளது. ஆகையால், இது ஓர் 'உள்வரைதல்' ஆகும்.

3. R என்பது எல்லா மெய் எண்களின் கணம் (set of all real numbers) $x \in R$. R, தனக்குள்ளேயே கீழ்க்கண்ட விதங்களில் வரையப்படுகிறது. இவற்றில் எவை 'உள்வரைதல்கள்', எவை 'மேல்வரைதல்கள்', எவை 'ஒன்றுக்கொன்றான வரைதல்கள்'?

(1) $x \to 2x - 1$ (2) $x \to x^2$

(3) $x \to x^3$ (4) $x \to 4x$

4. P என்பது எல்லா நேர்முழு எண்களின் கணம். $n \in P$. $n \to 2n$ என்பது P-யை, எல்லா இரட்டை நேர்முழு எண்களின் கணம் E-ன் மேல் ஒன்றுக்கொன்றாக வரையப்பட்டுள்ளது என நிரூபி.

5. கீழே கொடுக்கப்பட்ட α, β இவை $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ என்ற கணத்தின் வரிசைமாற்றங்களானால், $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^2, β^2, $\alpha\beta^{1}$ இவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(a) $1\alpha = 2;\ 2\alpha = 1;\ 3\alpha = 3;\ 4\alpha = 5;\ 5\alpha = 4$

$1\beta = 1,\ 2\beta = 4,\ 3\beta = 2,\ 4\beta = 3,\ 5\beta = 5$

(b) $1\alpha = 4,\ 2\alpha = 3,\ 3\alpha = 5;\ 4\alpha = 1,\ 5\alpha = 5$

$1\beta = 2,\ 2\beta = 3,\ 3\beta = 1,\ 4\beta = 4,\ 5\beta = 5$

(c) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

6. கீழ்க்கண்டவற்றில் r என்பது S_7-ன் ஒரு மூலப்பொருள். r ஐ ஒன்றுக்கொன்று பொது உறுப்பில்லாத (disjoint) சுழல்வரிசை மாற்றங்களின் பெருக்கலாக எழுதவும்.

(a) $1r = 3;\quad 2r = 4;\quad 3r = 1;\quad 4r = 7;\quad 5r = 5$
$6r = 6;\quad 7r = 2$

(b) $1r = 5,\quad 2r = 3,\quad 3r = 4,\quad 4r = 7,\quad 5r = 6$
$6r = 1,\quad 7r = 2$

(c) $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

(e) $(1\,2\,3)\;(1\,6\,5\,4\,3)$

(f) $(2\,1\,3\,4\,5\,6)\;(1\,7\,2)$

7. k, ஒற்றை அல்லது இரட்டை எண்ணாக இருப்பதற்குத் தகுந்தாற்போல k நீளமுள்ள ஒரு சுழல்வரிசை இரட்டை அல்லது ஒற்றை வரிசைமாற்றமாக இருக்கும் என நிரூபிக்கவும்.

8. ஒவ்வோர் இரட்டை வரிசைமாற்றத்தையும் 3-நீளமுள்ள சுழல்வரிசை மாற்றமாகவோ அவற்றின் பெருக்கலாகவோ எழுதலாம் என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

3. குலங்கள்
(Groups)

3. 1. குலத்தின் வரையறை (Definition of a Group)

$G = \{a, b, c, d, \ldots\ldots\}$ என்ற ஒரு கணத்தில் (set), '$\circ$' என்ற ஓர் இரட்டைப் பொருள் செயலின் (Binary operation) சார்பாக, கீழ்க் கண்ட நான்கு விதிகளும் உண்மையானல் G என்பது ஒரு குல மாகிறது.

விதி 1: a, b என்று வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எந்த இரண்டு மூலப்பொருள்களையும் '$\circ$' என்ற செயலால் இணைத்தால், '$a \circ b$' என்ற G-யைச் சார்ந்த பிரத்தியேக மான ஒரு மூலப்பொருள் கிடைக்க வேண்டும்.

விதி 2: a, b, c என்ற மூன்று மூலப்பொருள்களையும் எடுத்தால், $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ என இருத்தல் வேண்டும்.

விதி 3: எந்த மூலப்பொருள் 'a' ஐ எடுத்தாலும் $a \circ e = e \circ a = a$ என்று இருக்குமாறு 'e' என்ற ஒரு பொருள் G-யில் இருத்தல் வேண்டும்.

விதி 4: எந்த மூலப்பொருள் 'a' ஐ எடுத்தாலும் $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ என்று இருக்குமாறு 'a'-க்குத் தகுந்த 'a^{-1}' என்ற மற்றொரு மூலப்பொருள் G-யில் இருத்தல் வேண்டும்.

குறிப்பு : 1 ஆவது விதிக்கு 'அடைப்பு விதி' (Closure law) என்று பெயர். இரட்டைப் பொருள் செயல் என்பதிலேயே இந்த 'அடைப்பு விதித் தன்மை' அடங்கியுள்ளது என்பதைச் சென்ற அத்தியாயத்தில் பார்த்தோம்.

2ஆவது விதிக்குச் 'சேர்ப்பு விதி' (Associative law) எனப் பெயர்.

3ஆவது விதியில் கண்ட 'e' என்ற பொருளுக்கு G-யின் முற்றொருமைப் பொருள் (Identity element) என்று பெயர்.

4ஆவது விதியில் கண்ட 'a^{-1}' என்ற பொருள் 'a'-யின் எதிர்ப்பொருள் (Inverse element) எனப்படுகிறது.

'$\circ$' என்ற செயலுக்கு 'ஒன்றுசேர்க்கும் செயல்' (Rule of composition) என்றும் பெயர்.

G என்ற ஒரு குலத்தைக் குறிப்பிட வேண்டுமானால் G-யின் மூலப்பொருள்கள் என்னவென்றும், ஒன்றுசேர்க்கும் செயல் (rule of composition or binary operation) என்னவென்றும் குறிப்பிட வேண்டும். பொதுவாக, எந்தக் குலத்தையும் $(G,\circ)$ என்று குறிப்பிட வேண்டும். G என்பது கணத்தையும், '$\circ$' என்பது இரட்டைப் பொருள் செயலையும் குறிக்கின்றன.

மாதிரி 1: R என்ற மெய் எண்களின் கணம், சாதாரணக் கூட்டல் $(+)$ என்ற செயலின் சார்பாக ஒரு குலமாகிறது எனக் காண்பிக்கவும்.

நிறுவல்: R ஐச் சார்ந்த a, b என்ற எந்த இரண்டு எண்களை எடுத்தாலும் $a + b =$ ஒரு மெய் எண் $= c \in G$ என்பது உண்மை.

a, b, c என்ற மூன்று எண்களை எடுத்தாலும்

$(a+b)+c = a+(b+c)$ என்பதும் உண்மை.

$a+0 = 0+a = a$ என்பதும் உண்மை.

எந்த எண் 'a'-க்கும் தகுந்தவாறு $a+(-a) = (-a)+a = 0$ என்று இருக்குமாறு '$-a$' என்ற எதிர் எண் உள்ளது. ஆகையால், R என்ற கணம் ஒரு குலமாகிறது. இக் குலத்தை $(R, +)$ என்று குறிப்பிடலாம்.

இதே போல I என்பது முழு எண்களின் (integers) கணமானால் $(I, +)$ என்பது ஒரு குலம் என்பதைச் சரிபார்க்கலாம். இதேபோலக் கலப்பு எண்களின் (complex numbers) கணம் C ஆனால், $(C, +)$ என்பது ஒரு குலம் என்பதை உணரலாம்.

3. 2. அபெலியன் குலம் (Abelian Group)

ஒரு குலத்தில் a, b என்ற எந்த இரண்டு பொருளை எடுத்தாலும் $a \circ b = b \circ a$ என்று இருக்குமானால் அதாவது பரிமாற்று விதி (commutative law) உண்மையாக இருக்குமானால், அந்தக் குலத்துக்கு அபெலியன் குலம் என்று பெயர். (Abel என்பவர் சென்ற நூற்றாண்டின் ஒரு கணித மேதை ஆவார்.) $(R, +)$ $(I, +)$, $(C, +)$ போன்றவை அபெலியன் குலங்கள் என்பதை உணரலாம்.

3. 3. பூச்சியத்தைத் தவிர உள்ள மெய் எண்களின் கணம் R_0 ஆனால், $(R_0, \cdot)$ என்ற அமைப்பை எடுப்போம். இதில் '$\cdot$' என்பது சாதாரணப் பெருக்கல் என்று கொள்வோம்.

$a, b \in R_0$ ஆனால், $a \cdot b \in R_0$ என்பது உண்மை.

$a, b, c \in R_0$ ஆனால், $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ என்பதும் உண்மை.

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ என்பதும் உண்மை.

1 என்ற எண் முற்றொருமை எண்ணாக உள்ளது. பூச்சியத்தைத் தவிர உள்ள எந்த எண் 'a'-க்கும், $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ என்று இருக்குமாறு 'a^{-1}' என்ற எதிர் எண் உள்ளது.

மேலும் $a \cdot b = b \cdot a$ என்பதும் உண்மையானபடியால், $(R_0, \cdot)$ என்பது ஓர் அபெலியன் குலம். இதேபோல, பூச்சியத்தைத்தவிர உள்ள எல்லா விகிதமுறு (rational) எண்களின் கணம் Q_0 என்றால், $(Q_0, \cdot)$ என்பது ஓர் அபெலியன் குலம் என்பதைச் சரிபார்க்கலாம்.

முழு எண்களின் கணம் I ஆனால் $(I, \cdot)$ என்பது ஒரு குலமாகாது என்பதைப் பார்ப்போம்.

$a, b \in I$ ஆனால், $a \cdot b \in I$ என்பது உண்மை.

$a, b, c \in I$ ஆனால், $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ என்பது உண்மை.

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ என்பது உண்மை.

$a = \pm 1$ என்று இல்லாத வேறு எந்த முழு எண் 'a'-க்கும், அதன் எதிர் எண்ணான a^{-1} என்பது ஒரு முழு எண் ஆகாது. ஆகையால், a^{-1} என்பது I-ல் இல்லை. ஆகையால், $(I, \cdot)$ என்பது ஒரு குலம் அன்று.

தேற்றம் 3.1. எந்தக் குலம் $(G, \circ)$-விலும் கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் உண்மையானவை.

(1) முற்றொருமைப் பொருள் 'e' என்பது, G-க்குப் பிரத்தியேகமாக ஒன்றுதான் உண்டு.

(2) G-யின் ஒவ்வொரு பொருள் 'a'-க்கும் தகுந்த பிரத்தியேகமான a^{-1} என்ற ஒரே எதிர் எண்தான் உள்ளது.

(3) $a, b, c \in G$; மற்றும் $a \circ b = a \circ c$ ஆனால், $b = c$ என்பது உண்மை.

(4) $a, b, c \in G$; மற்றும் $b \circ a = c \circ a$ ஆனால், $b = c$ என்பது உண்மை.

(5) $a, b \in G$; $a \circ x = b$ மற்றும் $y \circ a = b$ என்று இருக்குமாறு, பிரத்தியேகமான பொருள்கள் x, y, G-யில் உள்ளன.

(6) $a, b \in G$ ஆனால், $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ என்பது உண்மை.

நிறுவல் :

(1) முடிந்தால் G-யில் e, e' என்ற இரண்டு முற்றொருமைப் பொருள்கள் இருக்கட்டும்.

e'ஐ முற்றொருமைப் பொருளாகக் கருதினால்,

$e \circ e' = e$ என ஆகிறது. (1)

e ஐ முற்றொருமைப் பொருளாகக் கருதினால்,

$e \circ e' = e'$ என ஆகிறது. (2)

(1), (2) இவற்றிலிருந்து $e' = e$ என ஆகிறது. ஆகையால், G-ல் ஒரே ஒரு முற்றொருமைப் பொருள்தான் உள்ளது.

(2) முடிந்தால் 'a'-க்கு x, y என்ற இரண்டு எதிர் எண்கள் இருக்கட்டும்.

ஆதலால், $a \circ x = x \circ a = e$ என்றும், $a \circ y = y \circ a = e$ என்றும் ஆகிறது.

$a \circ x = e$ என்பதை எடுப்போம். இரண்டு பக்கங்களையும் 'y'-யினால் முன்செயல் (pre-operation) செய்வோம்.

$$y \circ (a \circ x) = y \circ e$$

அல்லது, $(y \circ a) \circ x = y$

அல்லது, $e \circ x = y$

அல்லது, $x = y$. ஆதலால், 'a'-க்குப் பிரத்தியேகமான ஓர் எதிர்ப்பொருள் தான் உள்ளது.

(3) $a \circ b = a \circ c$. இரண்டு பக்கங்களையும் 'a'-யின் எதிர்ப்பொருள் a^{-1} ஆல் முன்செயல் செய்வோம்.

$a^{-1} \circ a \circ b = a^{-1} \circ a \circ c$

அல்லது $e \circ b = e \circ c$

அல்லது $b = c$ என ஆகிறது.

(4) $b \circ a = c \circ a$. இரண்டு பக்கங்களையும் a^{-1} என்ற பொருளால் பின்செயல் (post operation) செய்வோம்.

$(b \circ a) \circ a^{-1} = (c \circ a) \circ a^{-1}$.

அல்லது $b \circ (a \circ a^{-1}) = e \circ (a \circ a^{-1})$

அல்லது $b \circ e = c \circ e$

அல்லது $b = c$ என ஆகிறது.

(5) $a \circ x = b$. இரண்டு பக்கங்களையும் a^{-1} ஆல் முன்செயல் செய்வோம்.

$$a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b$$

அல்லது $(a^{-1} \circ a) \circ x = a^{-1} \circ b$

அதாவது $e \circ x = a^{-1} \circ b$

அல்லது $x = a^{-1} \circ b$. ஆகையால், x என்பது a, b-க்குத் தகுந்த பிரத்தியேகமான தீர்வு.

$$y \circ a = b$$

அல்லது, $y \circ (a \circ a^{-1}) = b \circ a^{-1}$

அல்லது, $y \circ e = b \circ a^{-1}$

அல்லது, $y = b \circ a^{-1}$. அதாவது y என்பதும் a, b-க்குத் தகுந்த பிரத்தியேகமான தீர்வு.

(6) $(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1}$

$$= (a \circ e) \circ a^{-1}$$

$$= a \circ a^{-1} = e$$

ஆகையால், $b^{-1} \circ a^{-1}$ என்பது $a \circ b$-ன் எதிர்ப்பொருள்.

ஆகையால், $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

3.4. சில வரையறைகள்

(1) **முடிவுள்ள மற்றும் முடிவில்லாத குலம் (Finite and Infinite Group) :** ஒரு குலத்திலுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை ஒரு முடிவுள்ள அல்லது ஒரு முடிவில்லாத எண்ணுனல் அந்தக் குலம் முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத குலம் எனப்படுகிறது.

(2) **ஒரு முடிவுள்ள குலத்தின் வரிசை எண் (Order of a Finite Group) :** ஒரு முடிவுள்ள குலத்திலுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் எண், அந்தக் குலத்தின் வரிசை எண் (order) ஆகும்.

(3) **உட்குலம் (Sub-group) :** G என்ற குலத்துக்குள், K என்ற ஓர் உட்கணம் தனக்குள்ளாகவே அதே செயலின் சார்பாக ஒரு குலமானுல், K என்பது G-ன் ஓர் உட்குலம் (sub-group) எனப் படுகிறது.

தேற்றம் 3.2 : G என்ற குலத்தில் K என்ற ஓர் உட்கணம், உட்குலமாக இருக்கவேண்டுமானுல், கீழ்க்கண்ட இரண்டு நிபந்தனை கள் உண்மையாக இருத்தல் வேண்டும்.

(1) $a, b \in K$ ஆனுல், $a \circ b \in K$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

(2) $a \in K$ ஆனுல் $a^{-1} \in K$ என்றும் இருத்தல்வேண்டும்.

நிறுவல் : முதல் நிபந்தனையால் குலத்தின் அடைப்பு விதி (Closure law) உண்மையாகிறது.

$a, b, c \in K$, $K \subset G$ என்பதால் $a, b, c \in G$ என ஆகிறது.

ஆகையால், $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. $a \in K$, $a^{-1} \in K$ என்பதால், $a\, a^{-1} \in K$ என ஆகிறது. ஆனுல், $a\, a^{-1} = e =$ முற்றொருமைப் பொருள். ஆகையால், K-யின் முற்றொருமைப் பொருள் 'e' ஆகிறது.

$a^{-1} \in K$ என்பதால், a-க்கு K-ல் எதிர்ப்பொருள் இருக்கிறது என்பதும் உண்மையாகிறது. ஆகையால், K ஒரு குலமாகிறது. $K \subset G$ என்பதால் K, G-ன் ஓர் உட்குலம்.

மாதிரி 2 : G ஒரு குலம். G-ன் ஒவ்வொரு பொருளுடனும் பரிமாற்றம்செய்யும் (commuting) G-ன் பொருள்களடங்கிய Z என்ற ஓர் உட்கணம், G-ன் ஓர் உட்குலமென்று காண்பிக்கவும்.

$z_1, z_2, z_3 \ldots \in Z$ என்க.

$x \in G$ என்க.

கொள்கையின்படி $z_1 \; x = x \; z_1$

$z_2 \; x = x \; z_2$ என ஆகிறது.

$(z_1 \; z_2)x = z_1 \; x \; z_2 = x \; (z_1 \; z_2)$

ஆகையால், $z_1 \; z_2 \in Z$ என ஆகிறது.

மேலும், $x = x$

$= x \; z_1 \cdot z_1^{-1}$

அல்லது $z_1^{-1} \; x = z_1^{-1} \; z_1 x \; z_1^{-1}$

$= x \; z_1^{-1}$

ஆகையால், $z_1^{-1} \in Z$ என ஆகிறது. ஆகையால், தேற்றம் 2-ன்படி Z, G-யின் ஓர் உட்குலமென ஆகிறது.

3.5. பெருக்கல் அட்டவணை (Multiplication Table)

ஒரு முடிவுள்ள கணமும், அதற்குத் தகுந்த இரட்டைப்பொருள் செயலும் (Binary operation) வரையறுக்கப்பட்டால், கணத்தின் பெருக்கல் அட்டவணையைத் தயார் செய்ய முடியும். இந்த அட்டவணையிலிருந்து பல முடிவுகளை நாம் காணமுடியும். ஒரு கணம், குலம் என்று நிரூபிக்கவே இந்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்தலாம்.

பெருக்கல் அட்டவணையின் விளக்கம் : $\{a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4\}$ என்பது, சாதாரணப் பெருக்கலின் சார்பாக ஒரு குலம் என்க.

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	$a_1 \; a_1$	$a_1 \; a_2$	$a_1 \; a_3$	$a_1 \; a_4$
a_2	$a_2 \; a_1$	$a_2 \; a_2$	$a_2 \; a_3$	$a_2 \; a_4$
a_3	$a_3 \; a_1$	$a_3 \; a_2$	$a_3 \; a_3$	$a_3 \; a_4$
a_4	$a_4 \; a_1$	$a_4 \; a_2$	$a_4 \; a_3$	$a_4 \; a_4$

இதில் நிரைகள் (rows) a_1, a_2, a_3, a_4 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. நிரல்கள் (columns) a_1, a_2, a_3, a_4 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. உதாரணமாக, a_2 என்று குறிக்கப்பட்ட நிரையும், a_3 என்று குறிக்கப்பட்ட நிரலும் சந்திக்கும் கட்டத்தில் $a_2\,a_3$ என்ற பெருக்கற் பலன் எழுதப்பட்டுள்ளது. பொதுவாக ($a_r\,a_s$) என்ற பெருக்கற் பலன், a_r என்று குறிக்கப்பட்ட நிரையும், a_s என்று குறிக்கப்பட்ட நிரலும் சந்திக்கும் கட்டத்தில் எழுதப்பட வேண்டும். இதேபோல, இந்த அட்டவணையிலுள்ள எல்லாக் கட்டங்களையும் நிரப்பிவிடலாம்.

இந்த மாதிரியான அட்டவணையைக் கீழ்க்கண்ட மாதிரிக்குப் பயன்படுத்துவோம்.

மாதிரி 3 : $\{1, i, -1, -i\}$ என்ற கணம் சாதாரணப் பெருக்கலின் சார்பாக ஒரு குலம் என்று காண்பிக்கவும்.

இக் கணத்தின் பெருக்கல் அட்டவணை கீழே காட்டியபடி உள்ளது.

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

அ: 1

இந்த அட்டவணையிலிருந்து கீழ்க்கண்ட உண்மைகளைச் சரி பார்க்கிறோம்:

(1) கணத்தின் எந்த இரண்டு எண்களையும் பெருக்கினால் கணத்தின் மற்றோர் எண் கிடைக்கிறது.

(2) எந்த மூன்று எண்களை எடுத்தாலும் சேர்ப்பு விதி உண்மை. உதாரணமாக $[\,i\,(-1)]\,(-i) = i\,[(-1)\,(-i)] = -1$

(3) முற்றொருமை எண் 1 எனத் தெரிகிறது.

(4) எந்த எண்ணுக்கும் பிரத்தியேகமான எதிர் எண் உள்ளது.

உதாரணமாக, 1-க்கு எதிர் எண் 1; i-க்கு எதிர் எண் $-i$; -1-க்கு எதிர் எண் -1; $-i$-க்கு எதிர் எண் i.

மேலும் எந்த இரண்டு எண்கள், உதாரணமாக—1, —i எடுத்தாலும், $(-1)\ (-i) = (-i)\ (-1) = i$ என்று கிடைக்கிறது. ஆகையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணம் ஓர் அபெலியன் குலமாகிறது.

மாதிரி 4: கீழே கொடுக்கப்பட்ட x-ன் சார்புகள், கீழே கொடுக்கப்பட்ட இரட்டைப்பொருளின் சார்பாக ஒரு குலத்தை உருவாக்குகின்றன எனக் காண்பிக்கவும்.

$$e\ (x) = x;\quad a\ (x) = -x;\quad b\ (x) = \frac{1}{x};\quad c\ (x) = \frac{-1}{x}$$

இரட்டைச் செயல் விளக்கம் :

$$(a \cdot b)\ (x) = a\{b\ (x)\} = -b\ (x) = \frac{-1}{x} = c\ (x)$$

$$\therefore\ a \cdot b = c$$

இதைச் சார்பில், சார்பின் பிரதியிடு (substitution of one function in another) என்று சொல்லலாம். இதன்படி தயார்செய்த பெருக்கல் அட்டவணை பின்வருமாறு :

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

அ. 2

அட்டவணையை விளக்கும் வகையில் மற்றோர் உதாரணம் எடுப்போம்.

$$(b \cdot c)\ (x) = b\ \{c\ (x)\} = b\ \frac{-1}{x} = -x = a$$

இந்த அட்டவணையிலிருந்து, குலத்தின் நான்கு விதிகளும் உண்மையா எனப் பார்ப்போம்.

(1) கணத்தின் எந்த இரண்டு பொருள்களின் பெருக்கலும், கணத்திலுள்ள மற்றொரு பொருள்தான்.

(2) சேர்க்கும் விதி உண்மை.

(உ-ம்.) $(bc)a = aa = e$

$b(ca) = bb = e$

(3) $ae = ea = a$ ஆகையால், e என்பது முற்றொருமைப் பொருள்.

(4) எந்தப் பொருளுக்கும் எதிர்ப்பொருள் இருக்கிறது. இந்த மாதிரியில் எந்தப் பொருளும் தனக்கே எதிர்ப்பொருளாக உள்ளது. ஆகையால், கொடுக்கப்பட்ட கணம் ஒரு குலமாகிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட மட்டுவின் (modulus) மீத இனங்கள் (residue classes), கூட்டலின் சார்பாக ஒரு குலமாகிறது.

மாதிரி 5 : மட்டு 5-ன் மீத இனங்கள் (residue classes mod 5) கூட்டலின் சார்பாக ஒரு குலமாகிறது என நிரூபிக்கவும்.

எந்த எண்ணையும் 5ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதங்கள் 0, 1, 2, 3, 4. இவற்றில் 0 என்ற எண்ணுடன் முற்றொருமை கொண்ட எண்கள், ……… —15, —10, —5, 0, 5, 10, 15 ……… ஆவன. இந்த இனத்தில் எந்த எண் 'a'-யும் $a \equiv 0$ (மட்டு 5) என்பதைக் காணலாம். ஆகையால், இந்த இனத்தை C_0 என்று குறிக்கலாம்.

இதேபோல

$$C_1 = \ldots \; -9, \; -4, \; 1, \; 6, \; 11, \; 16, \ldots$$

$$C_2 = \ldots \; -8, \; -3, \; 2, \; 7, \; 12, \; 17, \ldots$$

$$C_3 = \ldots \; -7, \; -2, \; 3, \; 8, \; 13, \; 18, \ldots$$

$$C_4 = \ldots \; -6, \; -1, \; 4, \; 9, \; 14, \; 19, \ldots$$

$\{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4\}$ என்ற கணத்தின் அட்டவணையை வரைவோம். உதாரணமாக, $C_3\,C_4$ என்ற பெருக்கற் பலன் கண்டு பிடிக்க C_3-ல் எந்த ஓர் எண்ணையும், C_4-ல் எந்த ஓர் எண்ணையும் எடுத்துக் கூட்டினுல், உதாரணமாக $8 + 14 = 22$ எனக் கிடைக்கிறது. இதை 5ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 2. ஆகையால், $22 \in C_2$. ஆகையால் $C_3\,C_4 = C_2$ என எழுதவேண்டும். இதன்படி, கீழேகண்ட அட்டவணை கிடைக்கிறது.

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_0	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_0
C_2	C_2	C_3	C_4	C_0	C_1
C_3	C_3	C_4	C_0	C_1	C_2
C_4	C_4	C_0	C_1	C_2	C_3

அ. 3

அட்டவணையிலிருந்து கீழ்க்கண்டவை கிடைக்கின்றன:

1. எந்த இரண்டு பொருளின் கூடுதல் கணத்தின் மற்றொரு பொருள்.

2. சேர்ப்பு விதி உண்மையாக இருக்கிறது.

(உ-ம்.) $(C_3 + C_4) + C_1 = C_2 + C_1 = C_3$

$$C_3 + (C_4 + C_1) = C_3 + C_0 = C_3$$

3. முற்றொருமைப் பொருள் C_0.

4. எந்தப் பொருளுக்கும் கீழ்க்கண்டவாறு எதிர்ப்பொருள் உள்ளது.

$C_0 \rightarrow C_0$; $\quad C_1 \rightarrow C_4$

$C_2 \rightarrow C_3$; $\quad C_3 \rightarrow C_2$

$C_4 \rightarrow C_1$.

ஆகையால் மீத இனங்கள் ஒரு குலமாகின்றன.

மாதிரி 6: மட்டு 5-ன், 5 உடன் பொதுக்காரணி கொள்ளாத மீத இனங்கள் (residue classes mod 5 and prime to 5) பெருக்கலின் சார்பாக ஒரு குலமாகின்றன எனக் காட்டவும். 1, 2, 3, 4 இவை மட்டு 5-ன் பொதுக்காரணி இல்லாத மீதங்கள்.

$$C_1 = 1, \ 6, \ 11, \ 16, \ 21 \ \ldots \ldots \text{(மட்டு 5)}$$
$$C_2 = 2, \ 7, \ 12, \ 17, \ 22 \ \ldots \ldots \text{(மட்டு 5)}$$
$$C_3 = 3, \ 8, \ 13, \ 18, \ 23 \ \ldots \ldots \text{(மட்டு 5)}$$
$$C_4 = 4, \ 9, \ 14, \ 19, \ 24 \ \ldots \ldots \text{(மட்டு 5)}$$

பெருக்கலின் விளக்கம்: உதாரணமாக, $C_4 \cdot C_3$ என்ற பெருக்கற் பலன் காண, C_4 இனத்திலிருந்து ஏதாவது ஓர் எண்ணையும், C_3 இனத்திலிருந்து ஏதாவது ஓர் எண்ணையும் எடுத்துப் பெருக்குவோம்.

(உ-ம்.) $9 \times 8 = 72$

ஆனால், $72 \equiv 2$ (மட்டு 5)

ஆதலால் $C_4 \cdot C_3 = C_2$ என ஆகிறது.

இதேபோல மற்றப் பெருக்கற் பலன்களைக் கண்டுபிடித்தால் கீழ்க்கண்ட பெருக்கல் அட்டவணை கிடைக்கும்.

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4
C_2	C_2	C_4	C_1	C_3
C_3	C_3	C_1	C_4	C_2
C_4	C_4	C_3	C_2	C_1

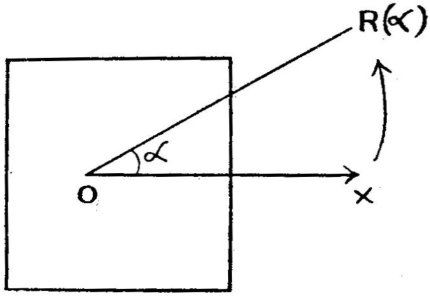
அட்டவணையிலிருந்து, மீத இனங்கள் நான்கும் ஒரு குலமாகின்றன என்பதைச் சரிபார்க்கலாம்.

மாதிரி 7: ஒரு தளத்தின் (plane) ஒரு புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு அந்தத் தளத்தைச் சுழற்றுதல்கள் (rotations) ஒரு முடிவில்லாத குலம் என்று காண்பிக்கவும்.

$R(\alpha)$ என்பது, தளத்தை OX என்ற திசையைத் தொடக்கத் திசையாகக் கருதி, α ↶ என்ற கோண அளவு சுழற்றும் செயல் எனக் குறிப்போம். இதில், $\alpha' \equiv \alpha$ (மட்டு 2π) என்றால்,

$$R(\alpha') = R(\alpha) \text{ எனக் கொள்ளவேண்டும்.}$$

$R(\alpha) \cdot R(\beta)$ என்பது, முதலில் α அளவு சுழற்றிப் பிறகு மேலும் β அளவு சுழற்றும் செயலைக் குறிக்கும். ஆகையால், $R(\alpha) \cdot R(\beta) = R(\alpha+\beta)$ என ஆகிறது. $R(\alpha+\beta)$ என்பதும் ஒரு சுழற்றும் செயல்தான்.



$$[R(\alpha) \cdot R(\beta)]\, R(\gamma) = R(\alpha+\beta+\gamma) = R \cdot (\alpha) \cdot [R(\beta) \cdot R(\gamma)]$$

என ஆகிறது.

$R(\alpha) \cdot R(0) = R(\alpha+0) = R(\alpha)$ என ஆகிறது.

ஆகையால், $R(0)$, இதன் முற்றொருமைப் பொருளாகிறது.

$R(\alpha) \cdot R(-\alpha) = R(\alpha-\alpha) = R(0)$ என ஆகிறது.

ஆகையால், மேற்கூறிய சுழற்றுதல்கள் ஒரு முடிவில்லாத குலமாகின்றன.

மாதிரி 8: மூன்று பொருள்கள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் வரிசை மாற்றங்கள் (permutations) ஒரு குலமாகின்றன என்பதைக் காண்பிக்கவும்.

மூன்று பொருள்களில் ஏற்படும் 6 வரிசைமாற்றங்கள் பின் வருமாறு :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

கீழ்க்கண்டவாறு பெருக்கற் பலன் காணவேண்டும் :

$$\alpha_3\,\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha$$

இதேபோல் மற்றப் பெருக்கற் பலன்களைக் கண்டுபிடித்து அட்டவணை தயார்செய்வோம்.

குறிப்பு : சில ஆசிரியர்கள், வரிசைமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலன் கண்டுபிடிக்க மற்றொரு கருத்தைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். அதாவது $\alpha_3\,\alpha_2$ என்பதைக் கண்டுபிடிக்க α_2-வை முதலில் எழுதிப் பிறகு α_3 எழுதுகிறார்கள், அதாவது,

$$\alpha_2\,\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_4$$

ஆனால், வேறு சில ஆசிரியர்களைப்போல் நாம் இம் முறையைப் பின்பற்றவில்லை.

அட்டவணை பின்வருமாறு:

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_2	α_2	α_1	α_4	α_3	α_6	α_5
α_3	α_3	α_5	α_1	α_6	α_2	α_4
α_4	α_4	α_6	α_2	α_5	α_1	α_3
α_5	α_5	α_3	α_6	α_1	α_4	α_2
α_6	α_6	α_4	α_5	α_2	α_3	α_1

அ. 4

இதிலிருந்து, எந்த இரண்டு பொருள்களின் பெருக்கற் பலனும், கணத்தின் மற்றொரு பொருள் எனக் காண்கிறோம். சேர்ப்பு விதி உண்மையென்று காணலாம். உதாரணமாக,

$$(\alpha_5\,\alpha_2)\,\alpha_6 = \alpha_3\,\alpha_6 = \alpha_4$$

$$\alpha_5\,(\alpha_2\,\alpha_6) = \alpha_5\,\alpha_5 = \alpha_4$$

முற்றொருமைப் பொருள் α_1 ஆகிறது. ஒவ்வொன்றுக்கும் தகுந்த எதிர்ப்பொருள் இருக்கிறது. ஆகையால், இந்த 6 வரிசைமாற்றங்

களும் ஒரு குலமாகின்றன. இந்தக் குலத்துக்குச் சமச்சீர்க் குலம் S_6 என்று பெயர்.

தேற்றம் 3.3.

n பொருள்களைக் கொண்ட ஒரு கணத்தில் ஏற்படக்கூடிய $n!$ வரிசைமாற்றங்களும் ஒரு குலம். [சமச்சீர்க் குலம் S_n (symmetric group S_n)] உருவாக்குகின்றன-

கணம் $\{1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots n\}$ என்க.

$$\alpha = \left\{ \begin{matrix} l_1, \; l_2, \ldots\ldots\ldots l_n \\ m_1, \; m_2 \ldots\ldots\ldots m_n \end{matrix} \right\} \text{ என்க.}$$

[அடைப்பில் மேல்வரிசையில் $(1, 2, 3 \ldots\ldots n)$ என்று தான் இருத்தல் வேண்டுமென்பதில்லை.] $l_1, l_2 \ldots \ldots l_n$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட பொருள்களின் ஒரு வரிசை. $m_1, m_2 \ldots\ldots\ldots m_n$ என்பன, $l_1 \; l_2 \ldots\ldots l_n$ இவற்றின் பிம்பங்கள். சுருக்கமாக α-வை

$$\alpha = \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} \text{ எனக் குறிப்போம்.}$$

$$\beta = \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \text{ எனக் குறிப்போம்.}$$

$$\gamma = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \text{ எனக் குறிப்போம்.}$$

$$\alpha \beta = \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l \\ n \end{matrix} \right\}$$

இதைப்போல் எந்த இரண்டு பொருளின் பெருக்கற் பலனும், கணத்தின் மற்றொரு பொருள் எனப் பார்க்கிறோம்.

$$(\alpha \; \beta) \; \gamma = \left\{ \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \right\} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} l \\ n \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\}$$

$$\alpha \; (\beta \; \gamma) = \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\}$$

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots \ldots \ldots n \\ 1\ 2\ 3 \ldots \ldots \ldots n \end{Bmatrix}$$ என்பது முற்றொருமைப் பொருள்

என்பதை உணரலாம்.

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 1\ \ 2\ 3 \ldots \ldots n \\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots \ldots a_n \end{Bmatrix}$$ ஆனால்,

$$\alpha^{-1} = \begin{Bmatrix} a_1\ a_2 \ldots \ldots \ldots a_n \\ 1\ \ 2 \ldots \ldots \ldots \ldots n \end{Bmatrix}$$ ஆகும்.

ஏனென்றால்,

$$\alpha\alpha^{-1} = \begin{Bmatrix} 1\ \ 2 \ldots \ldots \ldots \ldots n \\ a_1\ \ a_2 \ldots \ldots \ldots a_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1\ a_2 \ldots \ldots \ldots a_n \\ 1\ \ 2 \ldots \ldots \ldots \ldots n \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1\ \ 2 \ldots \ldots \ldots n \\ 1\ \ 2 \ldots \ldots \ldots n \end{Bmatrix} = \epsilon$$

இவ்வாறே $\alpha^{-1}\alpha = \epsilon$ என ஆகிறது.

ஆகையால், இந்த $n!$ வரிசைமாற்றங்களும் ஒரு குலமாகின்றன.

3.6. அணிக் குலங்கள் (Groups of matrices)

$$A = (a_{rs}) = \begin{Bmatrix} a_{11}\ \ a_{12} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ \ a_{22} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots a_{2n} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}\ \ a_{m2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

என்பது ஒரு $m \times n$ அணி எனப்படுகிறது. இதில் m நிரைகளும் (rows), n நிரல்களும் (columns) உண்டு. இதன் பொருள்கள் a_{ij} எண்கள். இந்த அணிக்கு மதிப்பு ஒன்றும் கிடையாது. ஆனால், அணிகளைக் கூட்டுதல், பெருக்குதல் முதலியவை வரையறுக்கப் படுகின்றன. இவற்றைப்பற்றி விவரமாகப் பின்வரும் ஓர் அத்தியாயத்தில் பார்க்கப்போகிறோம். அணிகளின் சில அடிப்படைக் கருத்துகளை மாத்திரம் கீழ்க்கண்ட ஓர் உதாரண அணியின் மூலம் விளக்குவோம்.

$$A = (a_{rs}) = \begin{Bmatrix} a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13} \\ a_{21}\ \ a_{22}\ \ a_{23} \end{Bmatrix}$$ என்க.

இதே இனத்தைச் சேர்ந்த மற்றும் பல அணிகளை எழுதலாம்.

உதாரணமாக,

$$B = (b_{rs}) = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{Bmatrix}$$ என்பது

A போன்ற ஒரு 2×3 அணி.

இதே இனத்தைச் சேர்ந்த பூச்சிய அணி **(zero matrix)**

$$0 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$ எனப்படுகிறது.

அணிகளின் கூட்டல் முதலியவை கீழே கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

$$A+B = (a_{rs} + b_{rs})$$
$$= \begin{Bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{Bmatrix}$$
$$A-B = (a_{rs}-b_{rs})$$
$$= \begin{Bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \end{Bmatrix}$$
$$m\,A = (ma_{rs}) = \begin{Bmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \end{Bmatrix}$$

இதில் m என்பது ஒரு சாதாரண எண் (scalar). இக் கருத்துகளை மாத்திரம் கொண்டு கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 3.4.

ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்த எல்லா அணிகளும் கூட்டலின் சார்பாக ஓர் அபெலியன் குலம் உண்டாக்குகின்றன.

A, B, C ... போன்றவை, $m \times n$ என்ற இனத்தைச் சேர்ந்த அணிகள் என்று கொள்வோம்.

$A + B = (a_{rs} + b_{rs})$. ஆதலால் $A + B$ என்ற அணி இதே இனத்தைச் சேர்ந்ததுதான்.

மேலும், $(A + B) + C = (a_{rs} + b_{rs} + c_{rs}) = A + (B + C)$ என்பதும் உண்மையாகிறது.

$A + 0 = (a_{rs} + 0) = (a_{rs}) = A$ என ஆகிறது.

ஆகையால் 0 என்பது, முற்றொருமைப் பொருளாகிறது.

$-A = (-1)\,A = (-a_{rs})$ என ஆகிறது.

$A + (-A) = (a_{rs} - a_{rs}) = (0) = 0$ என ஆகிறது.

ஆகையால், $(-A)$ என்பது A-ன் பிரத்தியேகமான எதிர்ப்பொருள் ஆகிறது.

மேலும், $A + B = B + A$ எனபதும் உண்மைதான். இவ்விதம் தேற்றம் நிருபிக்கப்படுகிறது.

3.7. செயல் குலங்கள் (Operator groups)

மேலே கூறிய, மாதிரி 7, 8 இவற்றில் காணப்படும் பொருள்கள் செயல்கள்தான். மாதிரி 5-ல் சுழற்றுதல்களும் (rotations), மாதிரி 6-ல் வரிசைமாற்றங்களும் (permutations) செயல்கள். இவை குலங்களாகின்றன என்பதைப் பார்த்தோம். இவற்றுக்குச் **செயல் குலங்கள்** எனப் பெயர்.

3.8. க்ளீன் 4-குலம் (Klein four-group)

நான்கு பொருள்களைக்கொண்ட சில குலங்கள், கீழ்க்கண்ட சில சிறப்புத் தன்மைகளைப் பெற்றுள்ளன. அவற்றுக்குக் **'க்ளீன் 4-குலங்கள்'** எனப் பெயர்.

(1) இவற்றில் நான்கு பொருள்கள் மட்டுமே இருத்தல் வேண்டும்.

(2) ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அதே பொருள் எதிர்ப்பொருளாக உள்ளது.

(3) முற்றொருமைப் பொருளைத் தவிர, மற்ற மூன்று பொருள்களில் எந்த இரண்டின் பெருக்கற் பலனும் மூன்றுவது பொருளாக உள்ளது.

(4) இந்தக் குலம் ஓர் 'அபெலியன்' குலம் (அதாவது பரிமாற்றுத் தன்மையுள்ளது-commutative).

க்ளீன் 4-குலத்துக்கு ஓர் உதாரணம் கொடுப்போம்

மாதிரி 8 :

$$e = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}; \qquad a = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}; \qquad c = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}$$

என்பவை ஒரு க்ளீன் 4-குலம் உண்டாக்குகின்றன என்று காண்பிக்கவும்.

இந்த நான்கு வரிசைமாற்றங்களின் பெருக்கல் அட்டவணை தயாரிப்போம்.

உதாரணமாக,

$$bc = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = a$$

இதைப் போன்று கண்டுபிடித்தால் கீழே கண்ட அட்டவணை கிடைக்கின்றது.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

அ. 5

க்ளீன் 4-குலத்தின் சிறப்புத்தன்மைகள் நான்கும் இக் குலத்தில் உள்ளன என்பதை அட்டவணையில் காண்கிறோம். உதாரணமாக, எந்தப் பொருளும் தனக்கே எதிர்ப்பொருளாக உள்ளது. e என்ற முற்றொருமைப் பொருளைத் தவிர உள்ள மூன்றில், எந்த இரண்டின் பெருக்கற் பலனும் மூன்றாவதாக உள்ளது. $ab = ba = c$ என்பதும் உண்மையாக உள்ளது. ஆகையால், இது ஒரு க்ளீன் 4-குலம்.

3. 9. ஒரே அமைப்புத்தன்மை (Isomorphism)

முற்றிலும் மாறுபட்ட பொருள்களைக் கொண்ட G, G' என்ற இரண்டு குலங்கள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால், அவை ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை (Isomorphic) எனப்படும். $G \simeq G'$ என்றும் எழுதப்படும்.

(1) G, G'-ன்மேல் ஒன்றுக்கொன்றாக வரையப்பட்டிருக்க வேண்டும் (G has one-one mapping onto G') அல்லது G, G' இவை ஒன்றுக்கொன்றான பிரத்தியேக இணைப்புக் (biunique correspondence) கொண்டதாக இருக்கவேண்டும்.

(2) G-யிலுள்ள a, b இவற்றின் பிம்பங்கள் G'-ல், a', b' ஆனால், $(a \circ b)$-யின் பிம்பம் $(a' \circ b')$ ஆக இருத்தல்வேண்டும். அதாவது, 'பெருக்கலின் பிம்பம், பிம்பங்களின் பெருக்கலாக' இருக்க வேண்டும்.

இதனால், இரண்டு குலங்கள் ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை ஆனால், அவற்றின் பெருக்கல் அட்டவணைகள் முற்றொருமை கொண்டவையாக இருக்கும்.

மாதிரி 9: கீழ்க்கண்ட வரிசைமாற்றங்களும், மட்டு 5-ன், 5உடன் பொதுக்காரணி கொள்ளாத மீத இனங்களும் (residue **classes** modulus 5 and prime to 5), ஒரே அமைப்புக் கொண்ட குலங்கள் எனக் காண்பி.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

மட்டு 5-ன், 5 உடன் பொதுக்காரணி கொள்ளாத மீத இனங்கள் c_1, c_2, c_3, c_4 ஆகும்.

மேற்கண்ட வரிசைமாற்றங்களின் பெருக்கல் அட்டவணை பின்வருமாறு:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

அ. 6

கீழ்க்கண்ட ஒன்றுக்கொன்றான வரைதல்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a \to a' = c_1; \quad b \to b' = c_2$$

$$c \to c' = c_4; \quad d \to d' = c_3.$$

மீத இனங்களின் பெருக்கல் அட்டவணை பின்வருமாறு:

	c_1	c_2	c_4	c_3
c_1	c_1	c_2	c_4	c_3
c_2	c_2	c_4	c_3	c_1
c_4	c_4	c_3	c_1	c_2
c_3	c_3	c_1	c_2	c_4

அ. 7

$c_1, c_2 \ldots\ldots$ இவற்றை $a', \quad b' \ldots\ldots$ என்று எழுதினால் கிடைக்கும் அட்டவணை பின்வருமாறு:

	a'	b'	c'	d'
a'	a'	b'	c'	d'
b'	b'	c'	d'	a'
c'	c'	d'	a'	b'
d'	d'	a'	b'	c

அ. 8

இது அட்டவணை 6 உடன் முற்றொருமை கொண்டது. ஆகையால், இரண்டு குலங்களும் ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை.

தேற்றம் 3.5. கேலியின் தேற்றம் (Caley's Theorem)

முடிவுள்ள எந்த ஒரு குலமும் அதற்குத் தகுந்த ஒரு வரிசை மாற்றங்களின் குலத்துடன் ஒரே அமைப்புக் கொண்டதாக உள்ளது. **(Every finite group is isomorphic with a suitable group of permutations).**

$\{G_1, G_2, G_3 \ldots\ldots\ldots G_g\}$ என்பது, 'g' பொருள்கள் அடங்கிய ஒரு குலம் G என்க. P, இதில் ஏதாவது ஒரு பொருளாக இருக்கட்டும். $G_1P, \ G_2P, \ldots\ldots\ldots G_gP$ என்ற பெருக்கற் பலன்கள், வேறு வரிசையிலுள்ள G-யின் அதே பொருள்கள்தான் என்பது, G ஒரு குலம் என்ற கொள்கையால் உண்மையாகிறது. ஆகையால், P என்ற பொருள், கீழ்க்கண்ட P' என்ற ஒரு பிரத்தியேகமான வரிசைமாற்றத்தைக் கொடுக்கிறது.

$$P' = \begin{vmatrix} G_1 & G_2 \ldots\ldots\ldots G_g \\ G_1P & G_2P \ldots\ldots G_gP \end{vmatrix}$$

இதே போல $Q, R \ldots$ போன்ற G-யின் ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் தகுந்த $Q', R' \ldots$ போன்ற வரிசைமாற்றங்கள் உள்ளன. $P', Q', R' \ldots$ போன்ற 'g' வரிசைமாற்றங்கள் G' என்ற ஒரு குலமாகின்றன என்றும், G என்ற குலத்துடன் ஒன்றுக்கொன்றான பிரத்தியேக இணைப்புக்

(biunique correspondence) கொண்டுள்ளது என்பதையும் சுலபமாக உணரலாம் அதாவது,

$$P \leftrightarrow P' = \begin{pmatrix} G_i \\ G_i\, P \end{pmatrix}$$

மேலும்,

$$P'\,Q' = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \ldots G_g \\ G_1P & G_2P \ldots G_g P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \ldots\ldots G_g \\ G_1Q & G_2Q \ldots G_gQ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & \ldots\ldots & G_g \\ G_1P & G_2P & \ldots\ldots & G_gP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1P & G_2P \ldots & G_gP \\ (G_1P)Q & (G_2P)Q \ldots & (G_gP)Q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & \ldots\ldots & G_g \\ G_1(PQ) & G_2\ (PQ) & \ldots\ldots & G_g(PQ) \end{pmatrix}$$

$= (PQ)'$ என ஆகிறது.

ஆகையால், $(PQ)' = P'\,Q'$ என்பது உண்மையாகிறது. ஆகையால் G, G' இவை ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை

3.10. சுழற் குலங்கள் (Cyclic Groups)

H என்ற ஒரு குலத்திலுள்ள எந்தப் பொருளும் அக் குலத்திலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட பொருள் 'a'-யின் அடுக்காக, அதாவது a^k என்றவாறு இருக்குமானால், இக் குலத்துக்குச் சுழற்குலம் என்று பெயர். 'a', H-ன் ஒரு பிறப்பாக்கி (generator) எனப்படுகிறது.

H என்ற குலம் 'a'-யினால் பிறப்பிக்கப்பட்டால் k எந்த நேர் முழு எண்ணாக இருந்தாலும், a^k என்பது Hஐச் சார்ந்தது என்று உணரலாம். ஆகையால், $H = \{a^k; k \in I$ (முழுஎண் கணம்) $\}$ என எழுதலாம். H என்ற சுழற்குலம் இவ்விதம் குறிக்கப்படும்போது அதன் முற்றொருமைப் பொருளை a^0 எனவும், a^k என்ற பொருளின் எதிர்ப் பொருளை a^{-k} எனவும் குறிக்கலாம். மேலும், $a^i \circ a^j = a^j \circ a^i = a^{i+j}$ என்பதால் எந்த ஒரு சுழற்குலமும் ஓர் அபெலியன் குலமாகிறது.

உதாரணமாக, அட்டவணை 7ஐப் பார்க்கவும். இதில் $c_4 = c_2{}^2$; $c_3 = c_2{}^3$; $c_1 = c_2{}^4$ எனத் தெரிகிறது. ஆகையால், இந்தக் குலம் c_2 ஆல் பிறப்பிக்கப்பட்ட ஒரு சுழற்குலம் எனக் காண்கிறோம். மேலும், $c_4 = c_3{}^2$; $c_2 = c_3{}^3$; $c_1 = c_3{}^4$ என்றும் காண்கிறோம். ஆகையால், இக் குலம் c_3-யினாலும் பிறப்பிக்கப்படுகிறது.

3.11. சுழல் உட்குலம் (Cyclic sub-group)

G என்ற குலத்தில் ஏதாவது ஒரு பொருள் 'a'ஐ எடுப்போம். G-யின் சில பொருள்கள் a-யின் அடுக்குகளாக இருக்கலாம். a-யும் அதன் அடுக்குகளும் G-யின் ஒரு சுழல் உட்குலமாகிறது.

3.12. G-யின் ஒரு பொருளின் வரிசை எண் (Order of an element of G)

$a \in G$ என்க. a-யினுல் பிறப்பிக்கக்கூடிய சுழல் உட்குலத்தின் வரிசை எண்தான் a-யின் வரிசை எண் ஆகும்.

மறுபடியும் அட்டவணை 7 ஐப் பார்க்கவும். $c_1 = c_4^2$. மற்ற எந்தப் பொருளும் c_4-ன் அடுக்கு அன்று. ஆகையால், c_4 என்பது $\{c_1\ c_4\}$ என்ற சுழல் உட்குலத்தைப் பிறப்பிக்கிறது. இந்த உட்குலத்தின் வரிசை எண் 2. ஆகையால், c_4-ன் வரிசை எண்ணும் 2 தான்.

இந்த உதாரணத்தைப் பின்பற்றி ஒரு பொதுமுடிவு உணரப்படுகிறது. 'a'-யின் எந்த ஒரு மிகக் குறைவான அடுக்கு எண் k-க்கு $a^k = e$ (முற்றொருமைப் பொருள்) ஆகிறதோ அந்த k என்ற எண்தான் 'a'-யின் வரிசை எண் ஆகிறது.

3.13. துணைக்கணம் (Coset)

G என்பது ஒரு குலம் என்க. H என்பது G-யின் ஓர் உட்குலம் (sub-group) என்க. G-யின் ஒருபொருள் 'a'-யை எடுத்து H ஐச் சார்ந்த ஒவ்வொரு பொருள் 'h' உடனும் பெருக்கினுல் கிடைக்கும் 'ah' என்ற எல்லாப் பொருள்களின் கணத்துக்கு, G-யில் H-ன் ஒரு துணைக்கணம் '$a\,H$' என்று பெயர்.

அதாவது, $a\,H = \{a\,h\ ;\ a \in G,\ h \in H\}$

$e\,H = H$ ஆனபடியால், H தனக்கே ஒரு துணைக்கணம் ஆகிறது.

தேற்றம் 3.6.

H-ன் இரண்டு துணைக்கணங்கள் (cosets) aH, bH. இவற்றுக்குப் பொதுவான பொருள் ஒன்ருகிலும் இருந்தால் $aH = bH$ என ஆகிறது.

$h_1, h_2 \in H$; $ah_1 = bh_2$ என்க.

ஆகையால், $a = b\,h_2\,h_1^{-1}$ என ஆகிறது. H ஐச் சார்ந்த எந்தப் பொருள் h ஆலும் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கவும்.

$$a\,h = b\,h_2\,h_1^{-1}\,h$$

ஆனால், $h_2\,h_1^{-1}h$ என்பது H ஐச் சார்ந்தது. ஆகையால், $a\,h \in b\,H$ என ஆகிறது. ஆகையால், $a\,H \subset b\,H$ என ஆகிறது. இதேபோல $b\,H \subset a\,H$ எனக் காண்பிக்கலாம். ஆகையால், $a\,H = b\,H$ எனக் கிடைக்கிறது.

கிளைத்தேற்றம்

H என்ற உட்குலத்தின் எந்த இரண்டு துணைக்கணங்களை எடுத்தாலும், அவை ஒரே கணமாக இருத்தல் வேண்டும் அல்லது அவற்றுள் ஒரு பொதுப் பொருளும் இருக்கமுடியாது.

உதாரணம் அட்டவணை 4 ஐப் பார்க்கவும்.

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ என்பது ஓர் உட்குலமாகிறது. இதை K என் போம். S_3-ல், K-ன் துணைக்கணங்கள் (cosets) பின்வருமாறு:

$$\alpha_1\,K = \{\alpha_1\;\alpha_2\}; \qquad \alpha_2\,K = \{\alpha_2\;\alpha_1\}$$
$$\alpha_3\,K = \{\alpha_3\;\alpha_5\}; \qquad \alpha_5\,K = \{\alpha_5\;\alpha_3\}$$
$$\alpha_4\,K = \{\alpha_4\;\alpha_6\}; \qquad \alpha_6\,K = \{\alpha_6\;\alpha_4\}$$

இவற்றில் மூன்று துணைக்கணங்கள்தான் ஒன்றுக்கொன்று மாறு பட்டவை. அவையாவன :

$$\alpha_1\,K = \alpha_2\,K = \{\alpha_1\;\alpha_2\}$$
$$\alpha_3\,K = \alpha_5\,K = \{\alpha_3\;\alpha_5\}$$
$$\alpha_4\,K = \alpha_6\,K = \{\alpha_4\;\alpha_6\}$$

S_3-ன் ஒவ்வொரு பொருளும் இந்த மூன்று துணைக்கணத்தில் ஏதாவது ஒன்றில்தான் இடம்பெற்றிருக்கிறது. ஆகையால், இந்த மூன்று துணைக்கணத்திலுள்ள மொத்தப் பொருள்களின் எண்ணிக்கை S_3-ன் மொத்தப் பொருள்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக உள்ளது.

தேற்றம் 3.7. லக்ராஞ்சியின் தேற்றம் (Theorem of Lagrange)

G என்ற குலத்தின் வரிசை எண் n ஆனால் G-ன் எந்த உட்குலத்தின் வரிசை எண்ணும் 'n' -ன் காரணியாக இருத்தல்வேண்டும்.

G-ன் வரிசை எண் முடிவுள்ளதாகையால் G-க்குள், H என்ற ஓர் உட்குலத்தின் மாறுபட்ட துணைக்கணங்களின் (different cosets) எண்ணிக்கையும் முடிவுள்ளதாகத்தான் இருத்தல்வேண்டும். இதை k என்போம். H-ல் m பொருள்கள் இருக்கட்டும். ஆதலால், ஒவ்வொரு துணைக்கணத்திலும் m பொருள்கள்தான் உள்ளன. G-ன் ஒவ்வொரு

பொருளும் ஏதாவது ஒரு துணைக்கணத்தில்தான் இடம்பெறும் எனப் பார்த்தோம். ஆகையால், எல்லாத் துணைக்கணங்களிலுமுள்ள மொத்தப் பொருள்களின் எண்ணிக்கை G-லுள்ள மொத்தப் பொருள்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம். ஆகையால்;

$n = km$. ஆகையால் m, n-ன் ஒரு காரணி ஆகிறது.

கிளைத்தேற்றம் 1.

ஒரு பொருளின் வரிசை எண், அது பிறப்பிக்கக் கூடிய சுழல் உட்குலத்தின் வரிசை எண்ணுக்குச் சமமானதால், அப் பொருளின் வரிசை எண், G-ன் வரிசை எண்ணின் காரணியாகும்.

கிளைத்தேற்றம் 2.

G என்ற ஒரு குலத்தின் வரிசை எண் γ என்ற பகா எண் (prime number) ஆக இருந்தால், G ஒரு சுழற்குலமாக இருத்தல் வேண்டும்.

தேற்றத்தின்படி எந்த உட்குலத்தின் வரிசை எண்ணும் γ-வின் காரணியாக இருத்தல் வேண்டும். γ பகா எண் என்பதால் எந்த உட்குலத்தின் வரிசை எண்ணும் γ தான். எந்தப் பொருளும் ஒரு சுழல் உட்குலத்தைப் பிறப்பிப்பதால், G என்பது ஒரு சுழற்குலமாகிறது. மேலும், G-க்கு அதன் எல்லாப் பொருள்களும் பிறப்பாக்கிகள்.

கிளைத்தேற்றம் 3.

n வரிசை எண் உடைய G என்ற குலத்தின் ஒரு பொருள் 'a' ஆனால், $a^n = e$

a-ன் வரிசை எண் 'm' என்க.

ஆகையால் $a^m = e$ என ஆகிறது.

ஆனால் $n = km$ (தேற்றம்)

ஆகையால் $a^n = a^{km} = (a^m)^k = e^k = e$

ஒன்றுவிட்டு அமையும் குலம் (Alternating group)

சமச்சீர்க் குலம் S_n, அதாவது n பொருள்களின் $n!$ வரிசைமாற்றங்களின் குலத்தில் $\frac{n!}{2}$ இரட்டை வரிசைமாற்றங்களும், $\frac{n!}{2}$ ஒற்றை வரிசைமாற்றங்களும் உள்ளன என்று தேற்றம் 2.6-ல் பார்த்தோம். ஒற்றை வரிசைமாற்றங்களாலான உட்கணம் ஒரு குலமாகாது. ஏனெனின், இரண்டு ஒற்றை வரிசைமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனில் உள்ள பரிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ஓர் ஒற்றை எண் + ஓர்

ஒற்றை எண் = ஓர் இரட்டை எண் எனக் கிடைக்கும். ஆகையால், இந்தப் பெருக்கற் பலன் ஓர் இரட்டை வரிசைமாற்றமாகிறது.

ஆனால், $\frac{n!}{2}$ இரட்டை வரிசைமாற்றங்களாலான உட்கணம் ஒரு குலமாகிறது. ஏனெனில், இரண்டு இரட்டை வரிசைமாற்றங்களின் பெருக்கற் பலனிலுள்ள பரிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை = ஓர் இரட்டை எண் + ஓர் இரட்டை எண் = ஓர் இரட்டை எண் எனக் கிடைக்கும். ஆகையால், பெருக்கற் பலன் அந்தக் கணத்திலுள்ள வேறு ஓர் இரட்டை வரிசைமாற்றமாகிறது. மேலும், இந்த உட்கணத்துக்கு $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots\ldots\ldots n \\ 1 & 2 & \ldots\ldots\ldots n \end{pmatrix}$ என்பதுதான் முற்றொருமைப் பொருள்.

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots\ldots n \\ a_1 & a_2 \ldots a_n \end{pmatrix}$ என்ற இரட்டை வரிசைமாற்றத்தின் எதிர்ப் பொருள் $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots\ldots\ldots & a_n \\ 1 & 2 & \ldots\ldots\ldots & n \end{pmatrix}$ என்பதைப் பார்க்கலாம்.

அதாவது $\alpha\,\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \epsilon$. ஆகையால், இரட்டை வரிசைமாற்றங்களின் கணம் S_n-ன் ஓர் உட்குலமாகிறது. இதற்கு 'ஒன்று விட்டு அமையும் குலம்' எனப் பெயர்.

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட கணங்கள், குறிக்கப்பட்ட செயலின் சார்பாகக் குலங்களா என்று பார்க்கவும்.

   (a) மட்டு 10-ன் மீத இனங்கள் $\{1, 3, 7, 9\}$ பெருக்கலின் சார்பாக.

   (b) மட்டு 10-ன் மீத இனங்கள் $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ கூட்டலின் சார்பாக.

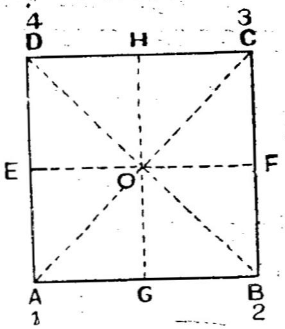
   (c) எல்லா நேர்விகிதமுறு எண்கள் (positive rational numbers) பெருக்கலின் சார்பாக

   (d) எல்லா முழுஎண்களும், $a \circ b = a + b + 1$ என்ற செயலின் சார்பாக.

2. $a, b \in G$; மேலும் $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$ ஆனால், G, ஓர் அபெலியன் குலமாக இருத்தல்வேண்டும்.

3. G-யின் ஒவ்வொரு பொருள் x உடன், $a\,x = x\,a$ என்று இருக்குமாறு G-ஐச் சார்ந்த 'a' போன்ற பொருள்களின் கணம் ஓர் உட்குலம் என்று காண்பிக்கவும்.

4. $ABCD$ என்ற சதுரத்தின் மூலைகளை 1, 2, 3 4 எனக் குறிக்கவும். G, F, H, E பக்கங்களின் மையங்கள். O சதுரத்தின் மையம். O-ஐ மையமாக வைத்து சதுரத்தை 90° ↶ சுழற்றினால் $\alpha = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{Bmatrix}$ என்ற வரிசை மாற்றம் கிடைக்கிறது.



$\alpha^2 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$ எனக் கிடைக்கிறது. α^3 என்ன ? சதுரத்தை EF-ஐ அச்சாக வைத்து 180° சுழற்றினால் $\beta = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$ என ஆகிறது. இதேபோல முறையே GH, AC, BD இவற்றை அச்சாக வைத்து 180° சுழற்றினால் கிடைக்கும் γ, δ, σ என்ற வரிசைமாற்றங்கள் என்ன ? ϵ என்பது முற்றொருமைப் பொருளானால், ϵ, α, α^2, α^3, β, γ, δ இந்த எட்டு வரிசைமாற்றங்களும் ஒரு குலமாகின்றன என்று காண்பிக்கவும்.

5. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தைத் தனக்குள்ளாகவே வெவ்வேறு முறையில் நிறுத்தும் சுழற்சிக் குலம் சமச்சீர்க் குலம் S_3 உடன் ஒரே அமைப்புக் கொண்டது எனக் காண்பிக்கவும்.

6. $G \simeq G'$; G-ன் பொதுப்பொருள் 'a' - ன் பிம்பம் G'-ல் a' என்க. G - ன் முற்றொருமைப் பொருள் e - ன் பிம்பம் e'. e' G' -ன் முற்றொருமைப் பொருள் எனக் காண்பிக்கவும்.

7. சமச்சீர்க் குலம் S_3-ன் எல்லா உட்குலங்களையும் காண்.

8 1 என்ற எண்ணின் m-படி மூலங்கள் (m th roots of units) பெருக்கலின் சார்பாக ஒரு குலமாகின்றன என்று காண்பிக்கவும்.

9. நேர் முழு எண்கள் (+ ve-integers) கூட்டலின் சார்பாக ஒரு குலம் அன்று என்று காண்பிக்கவும்.

10. $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

என்பவை ஒரு குலமாகின்றன என்று காண்பிக்கவும். மேலும், இது 'a' - ல் பிறப்பிக்கப்பட்ட ஒரு சுழற்குலம் என்றும் காண்பிக்கவும்

11. கீழ்க்கண்ட சார்புகள், கீழே குறிக்கப்பட்ட செயலின் சார் பாக ஒரு குலம் என்று காண்பிக்கவும்.

$$e(x) = x; \quad p(x) = \frac{1}{x}; \quad q(x) = 1 - x;$$

$$r(x) = \frac{x}{x-1}; \quad s(x) = \frac{1}{1-x}, \quad t(x) = \frac{x-1}{x}$$

செயல்: $p \cdot q = (p \cdot q)(x) = p[q(x)]$

$$= \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{1-x} = s(x) = s$$

இந்தக் குலம், சமச்சீர்க் குலம் S_3 உடன் ஒரே அமைப்புக் கொண் டுள்ளது என நிரூபிக்கவும்.

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ என்பவை ஒரு குலமென்று காண்பிக்கவும்.

13. மட்டு 8-ன், 8-உடன் பொதுக்காரணி கொள்ளாத மீத இனங்கள் பெருக்கலின் சார்பாக ஒரு குலமாகின்றன எனக் காண்பிக் கவும். மேலும், இக் குலம், கேள்வி 12-ல் உள்ள குலத்துடன் ஒரே அமைப்புக் கொண்டுள்ளது எனவும் காண்பிக்கவும்.

14. $|z| = 1$ என்றுள்ள எல்லாக் கலப்பு எண்கள் 'z'-ம் பெருக்கலின் சார்பாக ஒரு குலம் என்று காண்பிக்கவும்

15. G, H என்ற இரண்டு சுழற்குலங்கள் ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை. ஆனால், G-ன் ஒரு பிறப்பாக்கியின் (generator) பிம்பம் H-ன் ஒரு பிறப்பாக்கியாக உள்ளது என்று காண்பிக்கவும்.

16. ஒரு சுழற்குலம் G-ன் ஒவ்வோர் உட்குலம் H-ம் ஒரு சுழற் குலமாகிறது என நிறுவுக. [G, 'a' என்ற பொருளால் பிறப்பிக்கப் படட்டும். $a^m \in H$ என இருக்குமாறு m நேர் முழு எண்களில் மிகச் சிறியதாக இருக்கட்டும். $H \subset G$ என்பதால், H-ஐச் சார்ந்த எந்தப் பொருளும் a^k என இருத்தல்வேண்டும். வகுத்தல் இயல்பின்படி (division algoritham) $k = qm + r$ என இருக்கும்படி, q, r என்ற முழு எண்கள் உள்ளன. இதில் $r < m$. ஆதலால் $a^k = a^{qm+r} = (a^m)^q \cdot a^r$. ஆதலால், $a^r = a^k(a^m)^{-q}$. $a^m \in H$, $a^k \in H$ என்ப தால், $a^r \in H$ என ஆகிறது. $r < m$ என்பதால் a^r, கொள்கையின் படி H-ஐச் சார்ந்திருக்க முடியாது. ஆதலால் $r = 0$. ஆதலால் $a^k = (a^m)^q$ ஆதலால் H, a^m என்பதால் பிறப்பிக்கப்படுகிறது. ஆதலால் H, ஒரு சுழல் உட்குலமாகிறது.]

4. வளையங்கள், முழுமை அரங்கங்கள், களங்கள்

(Rings, Integral Domains and Fields)

4.1.

ஒரு கணம் ஒரு குலமாக வேண்டுமாயின், அதில் ஓர் இரட்டைப்பொருட் செயல் வரையறுக்கப்பட்டிருத்தல் வேண்டும். ஒரு கணம், வளையம் (Ring) அல்லது முழுமை அரங்கம் (Integral Domain) அல்லது களம் (Field) ஆக வேண்டுமாயின், அதில் இரு இரட்டைப்பொருட் செயல்கள் தேவைப்படும்.

4.2. வளையத்தின் வரையறை.

$R = \{a, b, c, \ldots\ldots\ldots\}$ என்ற ஒரு கணத்தில் கூட்டல் (+) என்றும், பெருக்கல்(×) என்றும் இரண்டு இரட்டைப் பொருட் செயல்கள் வரையறுக்கப்பட்டுக் கீழ்க்கண்ட ஏழு தன்மைகளும் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டால், R என்பது ஒரு வளையம் (Ring) எனப்படுகிறது.

தன்மை 1: $a+b$, $a\,b$ இவை இரண்டும் R-ன் பொருள்களாகவே இருத்தல் வேண்டும். [அடைப்பு விதி (Closure Law)]

தன்மை 2: $a+b = b+a$ என்பது உண்மையாக இருத்தல் வேண்டும். [கூட்டலில் பரிமாற்றுவிதி]

தன்மை 3: $(a+b)+c = a+(b+c)$ என்று இருத்தல் வேண்டும். [கூட்டலில் சேர்ப்பு விதி]

தன்மை 4: R-ன் எந்தப் பொருள் 'a'-க்கும் $a+0=a$ என்று இருக்குமாறு 0 என்ற பூச்சியப் பொருள் R-ல் இருத்தல் வேண்டும்.

தன்மை 5: R-ன் எந்தப்பொருள் 'a'-க்கும் தகுந்த $a+x=0$ என்று இருக்குமாறு 'a'-யின்'x' என்ற எதிர்ப்பொருள் இருத்தல்வேண்டும். [x, கூட்டலில் 'a'-ன் எதிர்ப்பொருள்]

தன்மை 6: $(a\,b)\,c = a(b\,c)$ என்று இருத்தல் வேண்டும்.
[பெருக்கலில் சேர்ப்பு விதி]

தன்மை 7: $a\,(b+c) = ab + ac$. மற்றும் $(b+c)\,a = ba + ca$ என்பவை உண்மையாக இருத்தல் வேண்டும்.
[பரவல் விதி]

உதாரணமாக, I என்ற முழு எண்களின் கணம், சாதாரணக் கூட்டல், சாதாரணப் பெருக்கல் இந்த இரண்டு செயல்களின் சார்பாக ஒரு வளையமாகிறது. இதே போல E என்ற இரட்டை முழு எண்களின் கணமும் (set of integers) அதே செயல்களின் சார்பாக ஒரு வளையமாகிறது.

4.3. உள்வளையம் (Sub-Ring)

R-என்ற வளையத்துக்குள் S-என்ற உட்கணம், R-ன் இரண்டு செயல்களின்சார்பாக, தனக்குள்ளாகவே ஒரு வளையமாக அமைந்தால், S, R-ன் உள்வளையம் எனப்படுகிறது.

மேற்கூறிய E என்ற இரட்டை முழு எண்களின் வளையம் I என்ற முழு எண் வளையத்துக்கு ஓர் உள்வளையமாக ஆகிறது.

ஒரு வளையத்துக்கு மேலும் சில தன்மைகள் உபரியாக இருக்கலாம். ஆனால், இவை வளையம் என்ற வரையறைக்கு அவசியமில்லை. உதாரணமாக, கீழ்க்கண்ட இரண்டு உபரித் தன்மைகளைப் பார்ப்போம்.

தன்மை 8: $a, b, \in R$; $a\,b = b\,a$ என்ற பெருக்கலில் பரிமாற்று விதி.

இத் தன்மை பொருந்தியிருந்தால் இந்த வளையத்துக்குப் 'பரிமாற்று வளையம்' (Commutative Ring) எனப் பெயர்.

தன்மை 9: R-ன் எந்த 'a'-க்கும் $a\,e = e\,a = a$ என்று இருக்குமாறு R-ல் e-என்ற ஒரு முற்றொருமைப் பொருள் (unity) இருத்தல்.

இத் தன்மைகொண்ட வளையத்துக்கு 'ஒருமைப் பொருள் கொண்ட வளையம்' (Ring with unity) எனப் பெயர்.

தன்மைகள் 8-ம், 9-ம் பொருந்தியிருந்தால் வளையத்துக்கு 'ஒருமைப் பொருள்கொண்ட பரிமாற்று வளையம்' (Commutative ring with unity) எனப் பெயர். இதற்கு உதாரணமாக, எல்லா முழுஎண் வளையத்தையும் (Ring of integers) கூறலாம்.

தன்மை 8 இருந்து, தன்மை 9 இல்லாமலிருந்தால் வளையத்துக்கு 'ஒருமைப் பொருள் இல்லாத பரிமாற்று வளையம்' (Commutative ring without unity) எனப் பெயர். இதற்கு உதாரணமாக, இரட்டை முழு எண் வளையத்தைக் (Ring of even integers) கூறலாம். இந்த வளையத்துக்கு ஒருமைப் பொருள் கிடையாது.

ஒருமைப் பொருள்கொண்ட பரிமாற்று வளையங்களுக்கு உதாரணமாகக் கீழ்க்கண்டவற்றைக் கூறலாம் :

சாதாரணக் கூட்டல், சாதாரணப் பெருக்கலின் சார்பாக,

(1) எல்லா முழு எண்களின் கணம் I
(Set of all Integers)

(2) எல்லா விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q
(Set of all Rational numbers)

(3) எல்லா மெய்யெண்களின் கணம் R
(Set of all Real numbers)

(4) எல்லாக் கலப்பெண்களின் கணம் C
(Set of all Complex numbers)

இவற்றில் I, Q-ன் உள்வளையமென்றும், Q, R-ன் உள்வளையமென்றும், R, C-யின் உள்வளையமென்றும் இருப்பதை உணரலாம். வளையங்களுக்குச் சில உதாரணங்களைப் பார்ப்போம்.

மாதிரி 1 : $R = (u, v, w, x)$ என்க. இக் கணத்தில் கூட்டல், பெருக்கல் இவை கீழ்க்கண்ட அட்டவணைகளில் விவரிக்கப் பட்டுள்ளன. R, ஒரு வளையம் எனக் காண்பிக்கவும்.

+	u	v	w	x
u	u	v	w	x
v	v	u	x	w
w	w	x	u	v
x	x	w	v	u

அ. 1

×	u	v	w	x
u	u	u	u	u
v	u	v	w	x
w	u	w	w	u
x	u	x	u	x

அ. 2

வளையத்தின் ஏழு தன்மைகளும் உண்மைகளா எனப் பார்ப்போம்.

அட்டவணைகளிலிருந்து அடைப்பு விதி, அதாவது தன்மை 1 உண்மையாக உள்ளது எனப் பார்க்கிறோம்.

அட்டவணை 1-லிருந்து, எந்த இரண்டு பொருள்கள் உதாரணமாக w, x என எடுத்தாலும் $w+x = x+w = v$ என இருக்கிறது. ஆகையால், தன்மை 2 உண்மை.

அட்டவணை 1-லிருந்து, எந்த மூன்று பொருள்கள் உதாரணமாக, u, v, x எடுத்தாலும் $(u+v)+x = v+x = w$ மற்றும் $u+(v+x) = u+w = w$ எனப் பார்க்கிறோம். ஆகையால், தன்மை 3 உண்மை.

அட்டவணை 1-லிருந்து, $u+u = u, u+v = v, u+w = w, u+x = x$ என இருப்பதால், u என்பது பூச்சியப் பொருளாக உள்ளது. ஆகையால், தன்மை 4 உண்மை.

அட்டவணை 1-லிருந்து, $u+u = u, v+v = u, w+w = u, x+x = u$ என இருப்பதால் ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் தகுந்த (இங்குத் தானுகவே) எதிர்ப்பொருள் இருக்கின்றது. ஆகையால், தன்மை 5 உண்மை.

அட்டவணை 2-லிருந்து, எந்த மூன்று பொருள் உதாரணமாக v,w,x இவற்றை எடுத்தாலும் $(vw)x = wx = u$ மற்றும் $v(wx) = vu = u$ என்று பார்க்கிறோம். ஆகையால், தன்மை 6 உண்மை.

அட்டவணை 1, 2 இவற்றிலிருந்து, எந்த மூன்று பொருள்கள், உதாரணமாக u, v, w இவற்றை எடுத்தாலும் $u(v+w) = u(x) = u$. மற்றும் $uv + uw = u+u = u$ என்றும் பார்க்கிறோம். ஆகையால், தன்மை 7-ம் உண்மை.

ஆகையால், கொடுக்கப்பட்ட கணம் R, ஒரு வளையமாகிறது. மேலும், அட்டவணை 2-லிருந்து எந்த இரண்டு பொருள்கள் v, w எடுத்தாலும் $vw = wv = w$ என இருக்கிறது. ஆகையால், தன்மை 8 உண்மையாக உள்ளது. மேலும், $uv = u, vv = v, wv = w, xv = x$ என இருப்பதால், 'v' இந்த வளையத்தின் ஒருமைப்பொருளாக உள்ளது. ஆகையால், R என்பது 'ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாற்று வளையம்' ஆகிறது.

மாதிரி 2: முழுஎண் கணம் I-லிருந்து, வரிசைப்படுத்தப்பட்ட மும்மூன்று பொருள்களின் சேர்க்கைகளின் கணம் L என்க. அதாவது,

$L = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in I$. கூட்டல், பெருக்கல் இவை பின் வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன :

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a+d, b+e, c+f)\ (a, b, c)$$
$$(d, e, f) = (ad, bd, +ce, cf).$$

L, ஒரு வளையம் எனக் காண்பிக்கவும்.

கூட்டல், பெருக்கல் இவற்றின் வரையறைகளிலிருந்தே அடைப்பு விதி உண்மை என ஆகிறது.

முழு எண்களுக்குப் பரிமாற்று விதி, சேர்ப்பு விதி இவை உண்மையானதால், L என்ற கணத்துக்குத் தன்மைகள் 2, 3 உண்மையாகின்றன. கூட்டலில், $(a, b, c) + (0, 0, 0) = (a, b, c)$ என இருப்பதால், $(0, 0, 0)$ என்பது 'L'-ன் பூச்சியப் பொருளாக உள்ளது. எந்தப் பொருள் (a, b, c)-க்கும் $(a, b, c) + (-a, -b, -c) = (0, 0, 0)$ என்று இருக்குமாறு $(-a, -b, -c)$ என்ற கூட்டலில் — எதிர்ப்பொருள் உள்ளது.

$$[(a, b, c)(d, e, f)](g, h, i) = (ad, bd + ce, cf)(g, h, i)$$
$$= (adg, bdg + ceg + cfh, cfi)$$

மற்றும் $(a, b, c)[(d, e, f)(g, h, i)] = (a, b, c)[dg, eg + fh, fi]$
$$= adg, bdg + ceg + cfh, cfi)$$

என உள்ளது. ஆகையால், பெருக்கலில் சேர்த்தல் விதி உண்மையாக உள்ளது.

மேலும்,

$$(a, b, c)[(d, e, f) + (g, h, i)] = (a, b, c)[d + g, e + h, f + i]$$
$$= (ad + ag, bd + bg + ce + ch, cf + ci)$$

மற்றும், $(a, b, c)(d, e, f) + (a, b, c)(g, h, i)$
$$= (ad, bd + ce, cf) + (ag, bg + ch, ci)$$
$$= (ad + ag, bd + bg + ce + ch, cf + ci)$$

என உள்ளது. ஆகையால், பரவல் விதியும் உண்மையாக உள்ளது. ஆகையால், L ஒரு வளையமாகிறது.

$(0, 1, 0)(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ என்றும்,

$(1, 0, 0)(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ என்றும் இருப்பதால் பெருக்கலில் பரிமாற்றுவிதி உண்மையன்று.

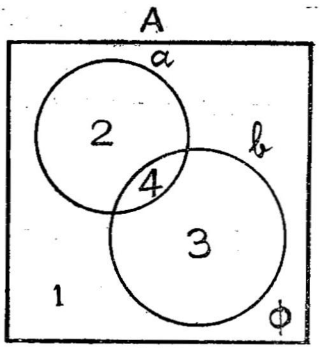
மேலும், $(a, b, c)\ (1, 0, 1) = (a, b, c)$ என இருப்பதால், $(1, 0, 1)$ என்பது பெருக்கலில் ஒருமைப் பொருளாக உள்ளது. ஆகையால், L ஓர் ஒருமைப் பொருள்கொண்ட பரிமாற்றம் இல்லாத வளையம் (Non-commutative ring with unity) என ஆகிறது.

மாதிரி 3: A-என்பது கீழே காட்டியுள்ள படத்திலுள்ளபடி ஒரு கணம். A-ல் a, b, c ...... போன்ற உட்கணங்களெல்லாம் சேர்ந்து R-என்ற ஒரு கணம் என்க. (R-ல், A-யும், அதன் வெற்றுக்கணமும் அடங்கியுள்ளது.) R-ல் உள்ள a, b, c ..... போன்ற பொருள்களின் கூட்டல், பெருக்கல் இவற்றின் வரையறை பின்வருமாறு:

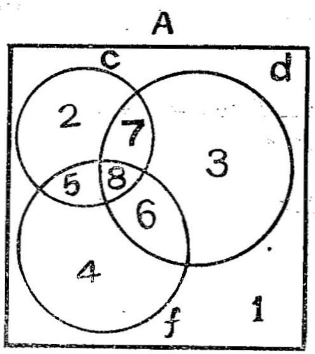
$a + b$ என்றால் 'a' அல்லது 'b' என்ற உட்கணங்களில் இருக்குமாறும், ஆனால், 'a', 'b' இரண்டுக்கும் பொதுவாக இல்லாமலும் இருக்கும் பொருள்களடங்கிய கணம் என்று கொள்க.

$a\,b$ என்றால் $a \cap b$, அதாவது 'a', 'b' இரண்டுக்கும் பொதுவாக உள்ள பொருள்களின் கணம் என்று கொள்க. இந்த வரையறைகள் படம் 1-ல் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

இவ்விதமானால் R-என்பது ஒரு வளையமெனக் காண்பி.



ப.1



ப.2

படம் 1-ல், கொள்கையின்படி $a + b = 2 + 3$ என்றும்,
$a\,b = 4$ என்றும் ஆகிறது.

[படம் 1, இக் கணத்தின் கொள்கையின்படி, கூட்டல், பெருக்கல் செயல்களின் விளக்கம்]

மேலும் படம் 1-ல் $a + b,\ ab \in R$ என்றும், $a + b = b + a$ என்ற தன்மைகள் உண்மை யெனவும் காண்கிறோம்.

படம் 2 ல், A-ன் c, d, f என்ற உட்கணங்கள் காண்பிக்கப் பட்டிருக்கின்றன.

$c + d = 2 + 5 + 3 + 6$

$(c + d) + f = 2 + 3 + 4 + 8$ என ஆகிறது.

$d + f = 7 + 3 + 4 + 5$

$c + (d + f) = 3 + 4 + 2 + 8$ என ஆகிறது.

ஆகையால், $(c + d) + f = c + (d + f)$ என்ற தன்மை உண்மையாகிறது.

φ என்பது A-ன் வெற்றுக்கணமானால் $A + \varphi = a$ என்பதைப் பார்க்கலாம். ஆகையால் φ, R-ன் பூச்சியப் பொருளாகிறது. மேலும் $a + a = \varphi$ என ஆகிறது. ஆகையால், R-ன் ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அதுவே கூட்டலில் எதிர்ப்பொருளாக உள்ளது.

$(c\,d)f = (8 + 7) \quad (5 + 8 + 6 + 7) = 8$ என்றும்,

$c\,(d\,f) = (2 + 7 + 8 + 5) \quad (8 + 6) = 8$ என்றும்.

கிடைப்பதால் $(c\,d)f = c\,(d\,f)$ என்ற தன்மை உண்மையாகிறது.

மேலும், $c\,(d + f) = 7 + 5$ என்றும், $c\,d + c\,f = 5 + 7$ என்றும் கிடைப்பதால் $c\,(d + f) = c\,d + c\,f$ என்ற தன்மை உண்மையாகிறது. ஆகையால் R, ஒரு வளையமாகிறது. மேலும், $a\,A = a$ என்றிருப்பதால் A, R-ன் ஒருமைப் பொருளாகிறது. மேலும், $a\,b = b\,a = 4$ என்றிருப்பதால், பெருக்கலில் பரிமாற்றுவிதி உண்மையாகிறது. ஆகையால், R என்பது ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாற்று வளையமாகிறது. வளையங்களின் சில தன்மைகளைப் பார்ப்போம்.

தேற்றம் 4.1

தன்மை 4-ல் கண்ட '0' என்ற பூச்சியப் பொருள், R-என்ற வளையத்தில் பிரத்தியேகமாக ஒன்றுதான் உள்ளது. முடிந்தால் $0, 0'$ என்ற இரண்டு பூச்சியப் பொருள்கள் இருக்கட்டும்.

$0'$-ஐப் பூச்சியப் பொருளாகக் கொண்டால்,

$0 + 0' = 0$ என ஆகிறது.

0-ஐப் பூச்சியப் பொருளாகக் கொண்டால்,

$0' + 0 = 0'$ என ஆகிறது.

$0' + 0 = 0 + 0'$ ஆகையால்,

$0 + 0' = 0'$ என ஆகிறது. ஆகையால்,

$0 = 0'$ என ஆகிறது.

தேற்றம் 4.2.

$a, b, c \in$ வளையம் R என்றும் $a + c = b + c$ ஆகவோ அல்லது $c + a = c + b$ ஆகவோ இருந்தால் $a = b$ என ஆகிறது.

$a + c = b + c, \qquad (1)$

தன்மை 5-ன் படி $c + x = 0$ என்று இருக்குமாறு c-க்கு x என்ற எதிர்ப்பொருள் R-ல் உண்டு.

(1)-ன் இருபக்கங்களிலும் x-ஐக் கூட்டவும்

$a + (c + x) = b + (c + x)$ அல்லது

$a + 0 = b + 0$ அல்லது

$a = b$ என ஆகிறது.

மறுபடியும், $c + a = c + b$ என்க.

x ஐ இரு பக்கங்களிலும் சேர்க்கவும்.

$x + c + a = x + c + b$ அல்லது

$(c + x) + a = (c + x) + b$ அல்லது

$0 + a = 0 + b$ அல்லது

$a = b$ என ஆகிறது.

தேற்றம் 4.3.

தன்மை 5-ல் கண்ட, 'a'-ன் கூட்டலில் எதிர்ப்பொருள் R-ல் பிரத்தியேகமாக உள்ளது. முடிந்தால் 'a'-க்கு x, y என்ற இரண்டு எதிர்ப்பொருள் இருக்கட்டும். ஆதலால்

$a + x = 0$ என்றும்

$a + y = 0$ என்றும் ஆகிறது. ஆகையால்

$a + x = a + y$

தேற்றம் 2-ன் படி $x = y$ என ஆகிறது.

'$-a$' என்பதன் வரையறை: கூட்டலில் 'a'-ன் எதிர்ப்பொருள் x ஆனால், அதாவது $a + x = 0$ ஆனால் x என்பதை '$-a$' என்று குறிக்கிறோம். ஆகையால் '$-a$' என்ற பொருள் கொடுக்கப்பட்டால், 'a'-யுடன் இதைச் சேர்த்தால் 0 கிடைக்கும் எனத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

தேற்றம் 4.4.

a, b என்பன, R-ன் எந்த இரண்டு பொருள்களாக இருந்தாலும் $a + x = b$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு x என்ற பிரத்தியேகமான தீர்வு இருக்கிறது. $x = b - a$ எனப்படுகிறது. முடிந்தால்,

$a + x = b$ என்றும்,

$a + y = b$ என்றும் இருக்கட்டும். ஆகையால்,

$a + x = a + y$ ஆதலால்

$x = y$ (தேற்றம் 2-ன்படி)

$x = b - a$ என எழுதுகிறோம்.

ஆதலால் '$b - a$' என்று கொடுக்கப்பட்டால் 'a'-உடன் இதைச் சேர்த்தால் 'b' கிடைக்குமெனத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். இதேபோல '$-a$' எனக் கொடுக்கப்பட்டால் 'a'-உடன் இதைக் கூட்டும்பொழுது 0 கிடைக்குமென உணரவேண்டும்.

மாதிரி 4: R-என்ற வளையத்தில் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்:

(1) $-(-a) = a$

(2) $-(a + b) = -a - b$

(3) $-(a - b) = -a + b$

(4) $(a - b) - c = a - (b + c)$

(1) $a + (-a) = 0$

அல்லது $(-a) + a = 0$

ஆதலால் 'a' என்பது '$-a$'-ன் எதிர்ப்பொருள்

ஆதலால் $-(-a) = a$.

(2) $-(a + b)$ என்பது '$a + b$'-ன் எதிர்ப்பொருள்

$a + b + (-a) + (-b)$

$= a + (-a) + b + (-b)$

$= 0 + 0 = 0$

ஆதலால் $(-a) + (-b)$, '$a + b$' -ன் எதிர்ப்பொருள்.

ஆதலால் $-(a+b) = -a - b$.

(3) $-(a - b)$ என்பது '$a - b$'-ன் எதிர்ப்பொருள்.

$a - b + (-a) + b = a + (-a) + (-b) + b$

$= 0 + 0 = 0$

ஆதலால் $-a + b$ என்பது '$a - b$' -ன் எதிர்ப்பொருள்.

ஆதலால் $-(a - b) = -a + b$.

(4) 'c' -யுடன் '$(a-b)-c$' -யைச் சேர்த்தால் '$a-b$' கிடைக்கும். 'c' -யுடன் வலக்கைப் பொருளைச் சேர்ப்போம்.

$$\begin{aligned} c + a - (b + c) &= c + a - b - c \\ &= c + a + (-c) + (-b) \\ &= c + (-c) + a + (-b) \\ & 0 + a - b \end{aligned}$$

அல்லது $a - (b + c) + c = (a - b)$

ஆகையால், $(a-b) - c = a - (b + c)$ என ஆகிறது.

தேற்றம் 4.5.

(1) R என்ற வளையத்துக்குப் பெருக்கலில் ஒருமைப் பொருள் இருந்தால், அது R-ல் பிரத்தியேகமாக ஒரு பொருள்.

(2) R-ன் 'a' என்ற எந்த ஒரு பொருளுக்கும் பெருக்கலில் ஒரு எதிர்ப்பொருள் இருந்தால், அது 'a'-க்குப் பிரத்தியேகமானது.

(1) முடிந்தால் R-ல் e, e' என்ற இரண்டு ஒருமைப் பொருள்கள் இருக்கட்டும்.

e' என்பதை ஒருமைப் பொருளாகக் கொண்டால் $e'e\,ee' = e$ என ஆகிறது.

e என்பதை ஒருமைப் பொருளாகக் கொண்டால் $ee' = e'e = e'$ என ஆகிறது.

ஆகையால் $e = e'$ எனக் கிடைக்கிறது.

(2) 's' என்பது 'a' -ன் பெருக்கலில் - எதிர்ப்பொருளானால், $sa = as = e$ என்று முடிவாகிறது. முடிந்தால் 't' என்று மற்றொரு எதிர்ப்பொருள் 'a' -க்கு இருக்கட்டும்.

ஆதலால் $ta = at = e$ என ஆகிறது.

$sa = e$ என்பதை எடுப்போம். இரண்டு பக்கங்களையும் t-ஆல் பின்பெருக்கல் செய்வோம்.

ஆதலால் $sat = et$

$$se = et$$

அல்லது $s = t$ என ஆகிறது.

தேற்றம் 4.6.

0 என்பது வளையம் R-ன் பூச்சியப் பொருளானால் R-ன் எந்தப் பொருள் 'a'-ஐ எடுத்தாலும் $a \cdot 0 = 0$. $a = 0$ என ஆகிறது. $a + 0 = a$

ஆகையால் $a \cdot (a+0) = a \cdot a$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

ஆனால் $a.(a+0) = a \cdot a + a \cdot 0$ என்ற முடிவு உண்மை.

ஆகையால் $a \cdot a + a \cdot 0 = a \cdot a$ என ஆகிறது.

ஆனால் $a \cdot a + 0 = a \cdot a$

ஆகையால் $a \cdot a + a \cdot 0 = a \cdot a + 0$

ஆகையால் $a \cdot 0 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 5: R-என்ற வளையத்தில் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும் :

(1) $a(-b) = -(ab)$

(2) $(-a)b = -(ab)$

(3) $(-a)(-b) = ab$

(4) $a(b-c) = ab - ac$

(5) $(b-c)a = ba - ca$

(1) $ab + a(-b) = a[b+(-b)] = a.0 = 0$

ஆகையால், $a(-b)$ என்பது 'ab' -ன் எதிர்ப்பொருள்.

ஆகையால் $a(-b) = -ab$.

(2) $ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0.b = 0$

ஆகையால் '$(-a)b$' என்பது 'ab' -ன் எதிர்ப்பொருள்

ஆகையால் $(-a)b = -(ab)$

(3) $[a + (-a)](-b) = 0.(-b) = 0$

அல்லது $a.(-b) + (-a).(-b) = 0$

அல்லது, $(-a)(-b) + [-(ab)] = 0$ (1)-ன்படி

ஆனால் $ab + [-ab] = 0$

ஆகையால் $(-a)(-b) = ab$ என ஆகிறது.

(4) $ac + a(b-c)$ என்பதை எடுப்போம்.

$$\begin{aligned} ac + a(b-c) = ac + a[b+(-c)] &= ac + ab + a(-c) \\ &= ac + ab - ac \\ &= ac - ac + ab \\ &= ab. \end{aligned}$$

ஆகையால் $a(b-c) = ab - ac$ என ஆகிறது.

(5) $ca + (b-c)\,a$ என்பதை எடுப்போம்.

$$
\begin{aligned}
ca + (b-c)\,a &= ca + [b + (-c)]\,a \\
&= ca + ba + (-c)\,a \\
&= ca + ba - ca \\
&= ca - ca + ba \\
&= ba
\end{aligned}
$$

ஆகையால் $(b-c)\,a = ba - ca$ என ஆகிறது.

தேற்றம் 4.7.

R என்ற வளையத்தில் S என்ற உட்கணம் கீழ்க்கண்ட இரண்டு தன்மைகளைப் பெற்றிருந்தால் S, R-ன் ஓர் உள்வளையமாகிறது.

(1) $a, b \in S$ என்றால்,
$a + b \in S$ மற்றும் $ab \in S$ என்றிருக்கவேண்டும்.

(2) $a \in S$ என்றால், $-a$-ம் $\in S$ என்றிருக்க வேண்டும்.

இங்குக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கொள்கை 1-லிருந்து வளையத்தின் முதல் மூன்று தன்மைகள் உண்மையாகின்றன.

$-a \in R$ என்பதாலும் $a + (-a) = 0$ என்பதாலும், 0-வும் S ஐச் சார்ந்தது.

இந்தத் தேற்றத்தின் இரண்டாவது கொள்கையின்படி, வளையத்தின் தன்மைகள் 4, 5 நிறைவேறுகின்றன. வளையத்தின் 6, 7 தன்மைகளும் நிறைவேறிவிடுகின்றன. ஆகையால் S, R-ன் ஓர் உள்வளையம்.

4.4. வளையங்களின் ஒரே அமைப்புத் தன்மை (Isomorphism of rings)

R, S என்ற இரண்டு வளையங்கள், கீழ்க்கண்ட இரண்டு நிபந்தனைகள் உண்மையானால், ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை எனப்படுகின்றன.

(1) R, S-ன் மேல் ஒன்றுக்கொன்றாக வரையப்பட்டிருத்தல் வேண்டும். (R is having one - one mapping onto S)

(2) $a, b \in R$; a', b' இவை S-ல் a, b இவற்றின் பிம்பங்கள் ஆனால், $(a+b)' = a' + b'$ என்றும், $(ab)' = a'\,b'$ என்றும் இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது 'கூட்டலின் பிம்பம், பிம்பங்களின் கூட்ட'லாகவும், 'பெருக்கலின் பிம்பம் பிம்பங்களின் பெருக்க'லாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

மாதிரி : 6 $K = \{a, b, c, d\}$; $L = \{i, j, k, l\}$ என்ற இரு வளையங்களின் கூட்டல், பெருக்கல் அட்டவணைகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. K, L இவை இரண்டும் ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை எனக் காண்பிக்கவும்.

K

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(1)

×	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	a	a	a
d	a	b	c	d

(2)

L

+	i	j	k	l
i	k	l	i	j
j	l	k	j	i
k	i	j	k	l
l	j	i	l	k

(3)

×	i	j	k	l
i	i	j	k	l
j	k	k	k	k
k	k	k	k	k
l	i	j	k	l

(4)

K, L-ன் மேல் ஒவ்வொன்றுக எவ்விதம் வரையப்பட்டால் 'ஒரே அமைப்புத் தன்மை' உண்மையாகும் எனப் பார்க்க வேண்டும். அட்டவணைகள் 1,3 இவற்றைப் பார்த்தால் a, K-யின் பூச்சியப் பொருள் என்றும், k, L-ன் பூச்சியப் பொருள் என்றும் தெரிகிறது. ஆகையால், 'a'-யின் பிம்பம் 'K' ஆக இருத்தல் வேண்டும். அட்டவணைகள் 2, 4 இவற்றிலிருந்து c-யும், j-யும் ஒரே தன்மை கொண்டவையாய்த் தோன்றுகின்றன. ஆகையால், c-யின் பிம்பம் j எனக் கொள்ளவேண்டும். மற்ற இரண்டு பொருள்கள் b, d இவற்றின் பிம்பங்கள் i, j எனக் கொள்வோம்.

கீழ்க்கண்ட வரைதல்களை ஏற்றுக்கொள்வோம்.

$a \to k,\ b \to i,\ c \to j,\ d \to l.$ அதாவது, $i = b',\ j = c',\ k = a',\ l = d'$.

இந்த இணைப்புகளின் உதவியால் அட்டவணைகள் (3), (4) இவற்றைப் பின்வருமாறு மாற்றி அமைக்கலாம்.

+	b'	c'	a'	d'
b'	a'	d'	b'	c'
c'	d'	a'	c'	b'
a'	b'	c'	a'	d'
d'	c'	b'	d'	a'

அ. 5

×	b'	c'	a'	d'
b'	b'	c'	a'	d'
c'	a'	a'	a'	a'
a'	a'	a'	a'	a'
d'	b'	c'	a'	d'

அ. 6

அட்டவணை 1-ல், ஏதாவது இரண்டு பொருள்களின் கூடுதல்

(உ - ம்.) $c + d = b$ என உள்ளது.

அட்டவணை 5-ல் $c' + d' = b'$ என உள்ளது. ஆக, $(c + d)' = c' + d'$ எனக் கிடைக்கிறது.

மேலும், அட்டவணை 2-ல் ஏதாவது இரண்டு பொருள்களின் பெருக்கல் (உ - ம்) $b \cdot c = c$ என உள்ளது. அட்டவணை 6-ல் $b' \cdot c' = c'$ என உள்ளது.

ஆகையால், $(b \cdot c)' = b' \cdot c'$ எனக் கிடைக்கிறது. இது போன்று மற்றவற்றையும் சரிபார்க்கலாம். ஆகையால், K, L இரண்டும் ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை எனப் பார்க்கிறோம்.

தேற்றம் 4.8.

$x \to x'$ என்ற வரைதலால் R என்ற வளையம் S என்ற வளையத்துடன் ஒரே அமைப்புக் கொண்டதாக இருந்தால் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும் :

(1) O என்பது R-ன் பூச்சியப்பொருளானால் O' என்பது S-ன் பூச்சியப் பொருளாகும்.

(2) a-ன் எதிர்ப்பொருளின் பிம்பம், a' என்ற பிம்பத்தின் எதிர்ப்பொருளாகும். அதாவது $(-a') = -a'$

(3) e என்பது R-ன் ஒருமைப் பொருள் என்றால் e' என்பது S-ன் ஒருமைப் பொருள் ஆகும்.

(4) R ஒரு பரிமாற்று வளையமானால் (Commutative ring) S-ம் ஒரு பரிமாற்று வளையம்.

(1) $$a + o = a$$

ஆதலால் $(a + o)' = a'$.

ஆனால் $(a + o)' = a' + o'$, $\because R \doteq S$

ஆதலால் $a' + o' = a'$

ஆதலால் o' என்பது, S-ன் பூச்சியப் பொருள்.

(2) $a + (-a) = o$

ஆதலால் $[a + (-a)]' = o'$

ஆதலால் $a' + (-a)' = o'$

ஆனால் $a' + (-a') = o'$

ஆதலால் $(-a)' = -a'$

(3) $a \cdot e = a$

$(a \cdot e)' = a'$ அல்லது $a' \cdot e' = a'$.

இவ்வாறே $e' \cdot a' = a'$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

ஆதலால் e', S ன் ஒருமைப் பொருள்.

(4) $a \cdot b = b \cdot a$

ஆதலால் $(a \cdot b)' = (b \cdot a)'$

அல்லது $a' \cdot b' = b' \cdot a'$

ஆதலால் S-ம், ஒரு பரிமாற்று வளையம்.

4.5. மீத கணங்களின் வளையம் (Ring of Residue classes)

மட்டு n (modulus n) இதன் மீத இனங்கள் சமத்துவ கணங்களாகின்றன என்று 2ஆவது அத்தியாயத்தில் பார்த்தோம். எந்த எண்ணையும் n ஆல் வகுத்தால் 0, 1, 2, 3 .... n-1 என்ற இந்த n எண்களில் ஒன்றுதான் மீதமாக இருக்கும். a, b என்ற இரண்டு எண்கள் ஒரே மீதத்தைக் கொடுத்தால் அவை மட்டு 'n'-ன் சார்பாக முற்றொருமை எண்கள் எனப்படும். அதாவது $a \equiv b$ (மட்டு n) என எழுதப்படுகிறது.

0 என்ற எண்ணை மீதமாகக் கொடுக்கக்கூடிய எண்களின் கணத்தை [0] என்றும், இதுபோல் மற்றக் கணங்களை [1], [2],...... ...[$n-1$] எனக் குறிப்போம். எந்த முழு எண்ணும் இந்த n கணங்களில் ஏதாவது ஒன்றில்தான் இடம் பெற்றிருக்கும். உதாரணமாக, S-ன் மீத கணங்கள் பின்வருமாறு :

$$[0] = \{ \ldots\ldots\ldots -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15 \ldots\ldots\ldots \}$$
$$[1] = \{ \ldots\ldots\ldots -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16 \ldots\ldots\ldots \}$$
$$[2] = \{ \ldots\ldots\ldots -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17 \ldots\ldots\ldots \}$$
$$[3] = \{ \ldots\ldots\ldots -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18 \ldots\ldots\ldots \}$$
$$[4] = \{ \ldots\ldots\ldots -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19 \ldots\ldots\ldots \}$$

இரண்டு கணங்களின் கூட்டல் என்பது என்னவென்று பார்ப்போம். உதாரணமாக [1] + [3] என்ருல், [1] என்ற கணத்திலிருந்து எந்த ஓர் எண்ணையும் [3] என்ற கணத்திலிருந்த எந்த ஓர் எண்ணையும் எடுத்துக் கூட்ட வேண்டும். 11 + 3 என்று எடுத்தால் 14 எண் கிடைக்கிறது. இது [4] என்ற கணத்தைச் சார்ந்தது. சுலபமான முறையில் 1, 3 இவற்றை எடுத்துக் கூட்டற் பலன் 4 என்பதைப் பார்த்து, [1] + [3] = [4] என்று கூறிவிடலாம். [2] + [3] = [5]. 5-ன் மீத எண் 0. ஆனதால் [5] = [0] என ஆகிறது. இதே போல [3] + [4] = [7] = [2] என ஆகிறது. இதேபோல, பெருக்கல் என்னவென்று பார்ப்போம்.

[3] [4] = [3 × 4] = [12] = [2] என ஆகிறது.

அவற்றுக்குப் பொதுவான நிரூபணங்களைப் பார்ப்போம்.

$a \equiv b$ (மட்டு n) என்க.

அதனுல் $a - b \equiv 0$ (மட்டு n) என்று ஆகிறது.

அல்லது $a - b = kn$ (இதில் k என்பது ஒரு முழு எண்)

அல்லது $a = b + kn$.

$a_1 \equiv b_1$ (மட்டு n) என்க.

$a_2 \equiv b_2$ (மட்டு n) என்க.

ஆதலால் $a_1 = b_1 + kn$

$a_2 = b_2 + k'n$ என ஆகிறது.

ஆதலால் $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + (k + k')^n$

ஆதலால் $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2$ (மட்டு n) என ஆகிறது.

ஆதலால் $[r] + [s] - [r + s]$ என ஆகிறது.

அதேபோல

$$a_1 a_2 = (b_1 + kn)(b_2 + k'n)$$
$$= b_1 b_2 + n(k' b_1 + kb_2) + kk' n^2$$

ஆதலால் $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2$(மட்டு n) என ஆகிறது.

ஆதலால் $[r]\ [s] = [rs]$ எனக் கிடைக்கிறது.

மட்டு எண் 'n'-ன் மீத கணங்களை I/n எனக் குறிக்கிறோம்.

தேற்றம் 4.9.

மீத கணங்கள் I/n கூட்டல், பெருக்கல் இவற்றின் சார்பாக ஒரு வளையமாகிறது எனக் காட்டவும்.

$[r]$, $[s]$, $[t]$ .... என்பவை I/n-ன் பொருள்களாகட்டும்.

$$[r] + [s] = [r + s]$$

$[r]\ [s] = [r\, s]$ இவை மீதக் கணங்களின் தன்மைகள்.

$$[r] + [s] = [r + s] = [s] + [r]$$
$$\{[r] + [s]\} + [t] = [r + s + t]$$
$$= [r] + \{[s] + [t]\}$$
$$[r] + [o] = [r + o] = [r]$$
$$[r] + [n - r] = [r + n - r] = [o]$$

ஆகையால் $[r]$-ன் எதிர்ப்பொருள் $[n - r]$ ஆகிறது.

$$\{[r][s]\}[t] = [r\, s\, t] = [r]\{[s][t]\}$$
$$[r]\{[s] + [t]\} = [r(s + t)]$$
$$= [rs + rt]$$
$$= [rs] + [rt]$$
$$= [r][s] + [r][t]$$

இவற்றால், I/n ஒரு வளையமாகிறது. மேலும் இது ஓர் 'ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாறு வளையமாகிறது' என்பதையும் உணரலாம்.

மாதிரி 7: மீத கணங்கள் $I/5$-ன் அட்டவணைகள் வரைந்து இவை ஒரு வளையமாகின்றன என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

மீத கணங்கள் $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$ என்பவற்றைச் சுருக்கமாக, 0, 1, 2, 3, 4 என்றே குறிப்பதுண்டு.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

அடைப்பு விதிகள் சரியாகின்றன. 0 என்பது பூச்சியப் பொருள். எந்தப் பொருளுக்கும் கூட்டலில் எதிர்ப்பொருள் உள்ளது.

உதாரணமாக,

$$[(1)\ (2)]\ (4) = (2)\ (4) = (3)$$

$$(1)\ [(2)\ (4)] = (1)\ (3) = (3)$$

$$(2)\ [(3) + (4)] = (2)\ (2) = (4)$$

$$(2)\ (3) + 2\ (4) = (1) + (3) = (4)$$

மேலும் $(2)\ (3) = (3)\ (2) = (1)$

இம்மாதிரியே மற்றப் பொருள்களுக்கும் இத்தன்மைகள் அமைந்துள்ளதைக் காணலாம்.

மேலும் 1 என்ற ஒருமைப் பொருளும் உள்ளது. ஆகையால், $I/5$ என்ற கணம் ஒரு வளையமாகிறது.

4.6. பல்லுறுப்புச் சார்புகளின் வளையம் (Ring of Polynomials)

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n.$$

$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots\dots$ என்ற முடிவில்லாத தொடராகவும் இருக்கலாம். இது தேராப் பொருள் (indeterminate) x-ல் ஒரு பல்லுறுப்புச் சார்பு. இதன் குணகங்களான $a_0, a_1, \dots\dots a_n$ இவை ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாறு வளையத்தைச் சார்ந்த பொருள்கள். உதாரணமாக, அவை முழு எண்களாக இருக்கலாம். இதைப் போன்ற பல்வேறு சார்புகளின் கணம் $S(x)$ எனப்படுகிறது. இவற்றில் கூட்டல், பெருக்கல் ஆகியவை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன:

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots\ldots + b_n x^n$$

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) x^0 + (a_1 + b_1) x^1 + \ldots\ldots \ldots + (a_n + b_n) x^n.$$

$$f(x)\, g(x) = a_0 b_0 x^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots\ldots + a_n b_0) x^n.$$

தேற்றம் 4.10.

ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாறு வளையத்தைச் சேர்ந்த பொருள்களைக் குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புச் சார்புகளின் கணம் $S(x)$ அதே மாதிரியான ஒரு வளையமாகிறது.

$$S(x) = \{ f(x), g(x), h(x), \ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + b_n x^n$$

$$h(x) = c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + c_n x^n.$$

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) x^0 + (a_1 + b_1) x^1 + \ldots \in S(x)$$

$$f(x) \cdot g(x) = a_0 b_0 x^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x^1 + \ldots \in S(x)$$

$a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots\ldots, b_0, b_1, b_2 \ldots\ldots;$ இவை வளையம் S-ஐச் சார்ந்தவை.

ஆகையால் $a_0 + b_0, a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots\ldots \in S$

ஆகையால் வளையத்தின் முதன் மூன்று தன்மைகளும் உண்மைகளாகின்றன.

$$E(x) = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \ldots\ldots + 0x^n \text{ என்க.}$$

$$f(x) + E(x) = (a_0 + 0) x^0 + (a_1 + 0) x^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots\ldots\ cf(x)$$

ஆகையால் $E(x)$, பூச்சியப் பொருளாகிறது.

$$-f(x) = -a_0 x^0 - a_1 x^1 - a_2 x^2 \ldots\ldots \text{ என்க.}$$

$$f(x) + [-f(x)] = (a_0 - a_0) x^0 + (a_1 - a_1) x^1 + \ldots\ldots = 0x^0 + 0x^1 + \ldots\ldots\ldots = E(x) \text{ என ஆகிறது.}$$

ஆகையால் $-f(x)$, $f(x)$-ன் எதிர்ப் பொருளாகிறது.

$[f(x)\, g(x)]\, h(x) =$

$$= a_0 b_0 c_0 x^0 + (a_0 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_0 + a_0 b_0 c_1)\, x^1 + \ldots\ldots$$

$f(x)\,[g(x)\, h(x)]$

$$= b_0 c_0 a_0 x^0 + (b_0 c_0 a_1 + b_0 c_1 a_0 + b_1 c_0 a_0)\, x^1 + \ldots\ldots$$

$f(x)\,[g(x) + h(x)]$

$$= [a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots]\,[(b_0 + c_0)\, x^0 + (b_1 + c_1)\, x^1 + \cdots]$$

$$= a_0 (b_0 + c_0)\, x^0 + [a_0 (b_1 + c_1) + a_1 (b_0 + c_0)]\, x^1 + \ldots\ldots$$

$$= a_0 b_0 x^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x^1 + \ldots\ldots$$

$$+ a_0 c_0 x^0 + (a_0 c_1 + a_1 c_0)\, x^1 + \ldots\ldots$$

$= f(x)\, g(x) + f(x)\, h(x)$ என ஆகிறது.

மேலும், $f(x)\, g(x) = g(x) f(x)$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

$\cup (x) = 1\, x^0 + o\, x^1 + o\, x^2 + \ldots\ldots$ என்க.

$f(x) \cup (x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots$

$= f(x)$ என ஆகிறது.

ஆதலால், $\cup (x)$ ஒருமைப் பொருளாகிறது.

ஆகையால் $S(x)$ என்பது ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாறு வளையமாகிறது.

4.7. முழுமை அரங்கங்கள் (Integral Domains)

வரையறை : ஒருமைப் பொருள் கொண்ட D என்ற பரிமாறு வளையம் (Commutative ring with unity), பின்கண்ட பத்தாவது தன்மையையும் கொண்டால் அதற்கு ஒரு 'முழுமை அரங்கம்' (Integral Domain) எனப் பெயர்.

$r, s \in D$ மற்றும் $rs = 0$ என்றால், $r = 0$ அல்லது $s = 0$ என்று இருத்தல் வேண்டும். — தன்மை 10. [இதற்கு வகுத்தல் விதி (Division Law) எனப் பெயர் உண்டு.] ஒரு கணம் வளையமாவதற்கு, முதல் 7 தன்மைகள் அவசியமாகின்றன. ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாறு வளையம் என்பதால் தன்மைகள் 8, 9 ஆகியவை உண்மையாகின்றன. இவற்றுடன் தன்மை 10-ம் சேர்ந்தால், வளையம் ஒரு முழுமை அரங்கமாகிறது.

உதாரணமாக, முழு எண்களின் கணம் I, விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q, மெய்யெண்களின் கணம் R, கலப்பெண்களின் கணம் C இவை யாவும் முழுமை அரங்கங்கள்.

இந்த அத்தியாயத்தின் மாதிரிக் கணக்கு 1-ல் கொடுக்கப்பட்ட வளையம் முழுமை அரங்கமன்று. அதில் பூச்சியப் பொருள் 'ω' என்பது. அக்கணக்கின் அட்டவணை 2-ல் $wx = ω$ எனக் காண்கிறோம். இதில் w, x ஒன்றும் பூச்சியப் பொருள் அல்ல.

தேற்றம் 4.11.

ஒரு வளையத்தில் 'வகுத்தல் விதி' என்ற 10ஆவது தன்மை உண்மையானால் கீழ்க்கண்ட நீக்கல் விதியும் (Cancellation Law) உண்மையாகிறது.

$a, b, c \in R$; மற்றும் $ac = bc$, மற்றும் $c \neq o$ ஆனால் $a = b$ என ஆகிறது.

$ac = bc$

ஆகையால் இவைகளில் வித்தியாசம் பூச்சியமாகிறது; அதாவது

$ac - bc = o$

அல்லது $(a - b)\,c = o$

தன்மை 10-ன்படி $a - b = o$ அல்லது $c = o$ என ஆகிறது. ஆனால், இத் தேற்றத்தின் கொள்கைப்படி $c \neq o$. ஆகையால் $a - b = o$; அதாவது $a = b$ என ஆகிறது.

தேற்றம் 4.12.

மட்டு எண் 'n'-ன் மீத கணங்கள் I/n, 'n' ஒரு பகா எண்ணாக இருந்தால் மட்டும், ஒரு முழுமை அரங்கமாகிறது.

நிரூபணம்

I/n, ஒரு வளையம் என்பது நாம் ஏற்கெனவே அறிந்ததே.

'n' ஒரு பகா எண் 'p' என்க. $[r]$, $[s]$ இவை I/n-ன் இரண்டு பொருள்களாகட்டும். மேலும் $[r][s] = [o]$ என்க. அதாவது $rs \equiv o$ (மட்டு p) என ஆகிறது. ஆகையால் 'rs' p-ஆல் வகுபடும். 'p' ஒரு பகா எண்ணானதால், 'r' அல்லது 's' p' யினால் வகுபட வேண்டும். அதாவது $r \equiv o$ (மட்டு p) அல்லது $s \equiv o$ (மட்டு p) என இருந்தல் வேண்டும். ஆதலால் $[r] = [o]$ அல்லது $[s] = [o]$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால் I/p ஒரு முழுமை அரங்கமாகிறது.

'n' ஒரு பகா எண் இல்லை எனக் கொள்வோம்.

ஆகையால், $1 < n_1 < n$; $1 < n_2 < n$; $n_1 n_2 = n$ என இருக்குமாறு n_1, n_2 என்ற இரண்டு எண்கள் உள்ளன.

$[n] = [n_1 n_2] = [n_1][n_2] = [o]$ என ஆகிறது.

ஆனால் n_1, n_2 இவை 'n' ஆல் வகுபடுவன அல்ல. ஆகையால் $(n_1) \neq (o)$ மற்றும் $(n_2) \neq (o)$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால், $[I/n]$ ஒரு முழுமை அரங்கம் அன்று.

ஆகையால் I/n, ஒரு முழுமை அரங்கமாவதற்கு 'n' ஒரு பகா எண்ணாக அவசியம் இருத்தல் வேண்டும்.

4.8. வரிசைப்படுத்தப் பெற்ற முழுமை அரங்கங்கள் (Ordered Integral Domains)

முழு எண்கள் கீழே கண்டுள்ளபடி வரிசை கொண்டவை என நமக்குத் தெரியும் :

$$\ldots\ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots$$

இதற்கேற்ப, முழுமை அரங்கத்திலும் ஒரு வரிசை வரையறுக்கப் படுகிறது.

வரையறை : D என்ற ஒரு முழுமை அரங்கம் கீழ்க்கண்ட தன்மைகளைப் பெற்ற D_p என்ற ஓர் உட்கணத்தைப் பெற்றிருந்தால் அதற்கு வரிசைப்படுத்தப் பெற்ற முழுமை அரங்கம் (**Ordered Integral** Domain) என்று பெயர்.

(1) $a, b \in D_p$ என்றால், $a + b \in D_p$

(கூட்டலில் அடைப்புத்தன்மை)

(2) $a, b \in D_p$ என்றால், $ab \in D_p$

(பெருக்கலில் அடைப்புத்தன்மை)

(3) 'a' என்பது D-ன் எந்தப் பொருளானாலும் கீழ்க்கண்ட மூன்றில் ஒன்று மட்டும் உண்மையாக இருத்தல் வேண்டும்.

(i) $a = o$ (ii) $a \in D_p$ (iii) $-a \in D_p$.

இப்படி அமைந்தால், D_p -ன் பொருள்கள் D-யின் நேர்ப்பொருள்கள் (**Positive elements**) என்றும், D_p இல்லாத பொருள்கள், D-யின் எதிர்ப் பொருள்கள் (**Negative elements**) எனப்படுகின்றன.

மேலும், $c - d \in D_p$ என்றால் $C > d$ என்போம்;

இவ்வாறே $C \in D_p$ எனில் $C > o$ என்றும்,

$-C \in D_p$ எனில் $C < o$ என்றும் எழுதுவோம்.

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட முழுமை அரங்கம் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்படலாம் ;

'$a, b \ldots$ என்பன D என்னும் முழுமை அரங்கத்தின் உறுப்புகள் என்க. மேலும் $>$ என்றஓர் ஈருறுப்பு உறவு ஒன்று D-ல் வரையறுக் கப்பட்டிருக்கட்டும். அத்துடன் $>$ ஆனது கீழ்க்கண்ட மூன்று தன்மை களைப் பெற்றிருக்கட்டும் :

தன்மை (1) $a > o$, $b > o$ என்றால் $a + b > o$

தன்மை (2) $a > o$, $b > o$ என்றால் $ab > o$

தன்மை (3) $a \in D$ என்றால், $a = o$ அல்லது $a > o$ அல்லது $a < o$ என்ற மூன்றினுள் ஏதாவது ஒன்று மட்டும் உண்மையாக இருத்தல் வேண்டும்.'

தேற்றம் 4.13.

$a, b, c \ldots$ முதலியவை D என்ற வரிசைப்படுத்தப்பெற்ற முழுமை அரங்கத்தைச் சார்ந்தன என்றால் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்.

(1) $C \in D$; $a > b$ என்றால் $a + c > b + c$

(2) $a > b$; $c > o$ என்றால் $ac > bc$

(3) $a > b$; $c < o$ என்றால் $ac < bc$

(4) $a > b$; $b > c$ என்றால் $a > c$

(5) $a \neq o$ என்றால் $a^2 > o$.

(1) $a > b$; $\therefore a - b > o$

$a - b + c - c > o$

அல்லது $a + c - b - c > o$

அல்லது $a + c - (b + c) > o$

அல்லது $a + c > b + c$.

(2) $a - b > o$

$c > o$

$(a - b)c > o$

ஆதலால், $ac - bc > o$

அல்லது $ac > bc$

(3) $a - b > o$;

$c < o$

அல்லது $-c > o$

ஆகையால் $-c(a-b) > o$

அல்லது $-ca + cb > o$

அல்லது $cb > ca$

அல்லது $bc > ac$

அல்லது $ac < bc$

(4) $a - b > o$

$b - c > o$

ஆகையால் $a - b + b - c > o$

அல்லது $a - c > o$

அல்லது $a > c$.

(5) $a > o$ என்க.

$a > o$

$a > o$

ஆதலால் $aa > o$; அல்லது $a^2 > o$.

$a < o$ என்க.

$-a > o$

$-a > o$

$(-a)(-a) > o$

அல்லது $a^2 > o$.

வரையறை 4.9. D-யைச் சார்ந்த 'a'-ன் தனி மதிப்பு (**Absolute value of** a)

'a'-ன் தனி மதிப்பு $|a|$ கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப் படுகிறது.

(1) $a \geqslant o$ ஆனல் $|a| = a$

(2) $a < o$ ஆனல் $|a| = -a$

ஆதலால், $|o| = o$ என்றும் $a \neq o$ என்ருல் $|a| > o$ என்றும் ஆகிறது.

தேற்றம் 4.14.

'D'-ல் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்:

(1) $a, b, c, d > o$; $a > b$; $c > d$ என்ருல் $ac > bd$

(2) $|ab| = |a|\;|b|$

(3) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

(4) D-யின் ஒருமைப் பொருள் 'e' ஆனால் $e > o$ என்றும் $me > o$ (m, ஒரு நேர் முழு எண்) என்றும் காண்பிக்கவும்.

1. $$a > b$$

$\because c > o, \quad ac > bc$

$$\therefore ac - bc > o \qquad -(1)$$

$$c > d$$

$\because b > o; \quad bc > bd$

$$\therefore bc - bd > o \qquad -(2)$$

(1)+(2) $ac - bc + bc - bd > o$

அல்லது $ac - bd > o$

அல்லது $ac > bd$

2. (i) $a > o,\ b > o$ என்க

$\therefore ab > o$

$|ab| = ab$

$= |a|\;|b|$

(ii) $a > o,\ b < o$ என்க.

$\therefore ab < o$

$\therefore |ab| = -ab = a(-b)$

$= |a|\;|b|$

(iii) $a = o,\ b > o$ என்க.

$ab = o$

$|ab| = |o| = o$

$= ob$

$= |o|\;|b|$

$= |a|\;|b|$

3. (i) $a > o,\ b > o$ என்க.

$\therefore\ a+b > o$

$|a+b| = a+b = |a| + |b|$

(ii) $a > o,\ b < o,\ a+b > o$ என்க.

$b < |b|$

அல்லது $|b| - b > o$ —(1)

$|a| = a$

அல்லது $|a| - a = o$ —(2)

(1,) (2)-லிருந்து $|b| - b + |a| - a > o$

அல்லது $|b| + |a| - (a+b) > o$

அல்லது $|a| + |b| > a+b = |a+b|$

ஆகையால் $|a+b| < |a| + |b|$

ஆகையால், $|a+b| \leq |a| + |b|$ என ஆகிறது.

(iii) $a > o,\ b < o,\ a+b < o$ என்க.

$|a| + a > o$

$|b| = -b.\quad \therefore\ |b| + b = o$

$\therefore\ |a| + a + |b| + b > o$

$\therefore\ |a| + |b| + a + b > o$

$\therefore\ |a| + |b| > -(a+b) = |a+b|$

4. $a > o$ என்க.

$a\,e = a > o$

ஆகையால் $e > o$

$e+e+e+ \ldots\ldots\ m$ தடவைகள் $> o$

அல்லது $m\,e > o$

4.10. நன்கு வரிசைப்படுத்தப்பெற்ற கணம் (Well - ordered Set)

வரிசைப்படுத்தப்பெற்ற முழுமை அரங்கத்தின் (Ordered Integral Domain) பொருள்களின் ஒரு கணம் S, கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு ‘ நன்கு வரிசைப்படுத்தப்பெற்ற கணம் ’ எனப்படுகிறது.

S-ல் பூச்சியமில்லாத எந்த உட்கணம் $\bigcup$ வை எடுத்தாலும் அதில் உள்ள எல்லாப் பொருள்களையும்விட சிறிய 'a' என்ற ஒரு பொருள் $\bigcup$-ல் இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, $a \leq x$, $a, x \in \bigcup$ நேர் முழு எண்களின் கணம் இந்த வகையைச் சேர்ந்தது. விகிதமுறு நேர் எண்களின் கணமோ, நேர் மெய்யெண்களின் கணமோ இவ்வகையைச் சேர்ந்தவை அல்ல. ஏனென்றால், இவற்றில் மிகச்சிறிய எண் என்று எதையும் குறிப்பிட முடியாது.

தேற்றம் 4.15.

D என்பது ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பெற்ற முழுமை அரங்கம். அதன் நேர்ப் பொருள்களடங்கிய D_p என்ற உட்கணம் நன்கு வரிசைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது. 'e' என்பது D-யின் ஒருமைப் பொருளானால் கீழ்க்கண்டவைகளை நிரூபிக்கவும் :

1) $D_p = \{me\ ;\ m$ ஒரு நேர் முழு எண்$\}$

2) $D = \{ne, n$ ஒரு முழு எண்$\}$

$a \in D_p$ என்க.

ஆதலால் $a > o$

$e^2 = e$

ஆனால் $e^2 > o$ 4. 13 (5)

ஆகையால் $e > o$

ஆகையால் $e \in D_p$

மேலும், $2e = e + e > o$

$3e = e + e + e > o$

இதே போல $me = e + e + e ......m$ தடவைகள்

$> o$

ஆகையால் $me \in D_p$

மேலும் D_p யிலுள்ள எந்தப் பொருளும் 'me' என்ற உருவம் கொண்டது என நிரூபிப்போம்.

முதலில் e, D_p-ல் மிகச்சிறிய பொருள் எனக் காண்போம். முடிந்தால் 'c' மிகச்சிறியதாக இருக்கட்டும். $o < c < e$

அல்லது $o < c^2 < ce$

அதாவது $o < c^2 < c$

ஆதலால் c யைவிட e^2 சிறிது. இது கொள்கைக்கு விரோதமானது.

D_p-ல் 'me' என்ற உருவங்கொள்ளாத பொருள்களின் கணம் $\bigcup$ என்க. இதன் மிகச்சிறிய பொருள் d என்க. 'e' என்பது D_p-யின் மிகச்சிறிய பொருளாகையால் $d-e>0$. ஆகையால் $d-e \in D_p$. $e>0$ என்பதால், $d-e<d$ என ஆகிறது. ஆகையால் $d-e \notin \bigcup$. ஆகையால் $d-e=m_1 e$. ஆகையால் $d=(1+m_1)e$.

அதாவது $d \notin \bigcup$. இது கொள்கைக்கு விரோதமானது. ஆகையால் D_p-ல் எல்லாப் பொருள்களும் 'me' என்ற உருவங் கொண்டவை.

$a=0$ என்றால் $a=0.e$ எனக் கொள்ளலாம்.

$a<0$ என்க.

$\therefore\quad -a>0$ ஆதலால் $-a \in D_p$

ஆதலால் $-a=m_2 e$

ஆதலால் $a=(-m_2)e$

ஆகையால் D-ன் எந்தப் பொருளும் $n e$ என்ற உருவம் பெற்றது (n என்பது ஒரு முழு எண்).

தேற்றம் 4.16.

தங்களின் நேர்ப் பொருள்களின் கணங்கள் நன்கு வரிசைப் பட்டதாயுள்ள D, D' என்ற இரண்டு முழுமை அரங்கங்கள் ஒரே அமைப்பு கொண்டவை (isomorphic).

$$D=\{ne\ ;\ n \text{ ஒரு முழு எண், } e,\ D\text{யின் ஒருமை எண்}\}$$

$$D'=\{ne'\ ;\ n \text{ ஒரு முழு எண், } e',\ D'\text{-ன் ஒருமை எண்}\}$$

n என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட முழு எண்ணுக்குத் தகுந்தாற்போல் D-ல் 'ne' என்ற பிரத்தியேகமான ஒரு பொருளும் D'-ல் 'ne'' என்ற பிரத்தியேகமான ஒரு பொருளும் உள்ளன.

'ne' யின் பிம்பம் 'ne'' எனக் கொள்வோம். இவ்விதம் D, D' இவற்றில் ஒன்றுக்கொன்றான பிரத்தியேக இணைப்பு இருக்கிறது.

$$\text{மேலும், } n_1e+n_2 e=(n_1+n_2)e$$
$$\to(n_1+n_2)e'$$
$$=n_1e^1+n_2e'$$

$$\text{மேலும், } (n_1 e)(n_2 e)=(n_1n_2)e$$
$$\to(n_1n_2)e'$$
$$=(n_1e')(n_2e')$$

ஆகையால் $D \simeq D'$

4.11. களங்கள் (Fields)

வரையறை : ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாறு வளையம் F என்பது கீழ்க்கண்ட தன்மையைப் பெற்றிருந்தால் அது ஒரு களம் (Field) எனப்படுகிறது.

பூச்சியத்தைத் தவிர, மற்ற எந்தப் பொருளுக்கும், பெருக்கலில் எதிர்ப்பொருள் இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $a \in F$; $a \neq o$ என்றால் $a\,a^{-1} = a^{-1}a = e$ என இருத்தல் வேண்டும்

தேற்றம் 4.17.

ஒரு களம், ஒரு முழுமை அரங்கமாக இருத்தல் வேண்டும்.

F என்பது ஒரு களம் என்க. $a, b \in F$; மற்றும் $ab = o$ என்க.

$a \neq o$ என்க. $a \in F$ என்பதால் a-க்கு a^{-1} என்ற எதிர்ப்பொருள் உள்ளது.

$$ab = o$$

அல்லது $\quad a^{-1}ab = a^{-1}o$

அல்லது $\quad e\,b = o$

அல்லது $\quad b = o.$

இதேபோல, $b \neq o$ என்றால் $a = o$ எனக் காண்பிக்கலாம். ஆகையால், $ab = o$ என்றால் $a = o$ அல்லது $b = o$ என ஆகிறது. ஆகையால் F என்பது ஒரு முழுமை அரங்கம்.

மாதிரி 8 : விகிதமுறு எண்களின் கணம் ஒரு களம் எனக் காட்டுக.

விகிதமுறு எண்களின் கணம், ஒருமைப் பொருள் கொண்ட ஒரு பரிமாறு வளையம் (A commutative ring with unity) எனப் பார்த்தோம். இதன் ஒருமைப் பொருள் 1. எந்த எண் a/b-க்கும் $(\neq o)$ b/a என்ற எதிர்ப் பொருள் இருக்கிறது.

அதாவது $(a/b)\,(b/a) = (b/a)\,(a/b) = 1.$

ஆகையால் விகிதமுறு எண்களின் கணம் ஒரு களம் (Field) ஆகிறது.

தேற்றம் 4.18.

p என்பது ஒரு பகா எண்ணானால் மட்டு எண் p-ன் மீத இனங்கள் I/p ஒரு களமாகிறது.

மீத இனங்கள் I/p, ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாறு வளையம் என்று தேற்றம் 9-ல் பார்த்தோம். $[r]$ என்பது, பூச்சியப் பொருளல்லாத I/p-ன் ஒரு பொருள் என்க. ஆதலால்,

$r \not\equiv o$ (மட்டு p) எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால் r, p யினுல் வகுபடாதது. p ஒரு பகா எண். ஆகையால் r, p ஆகியவைகளுக்கு ஒன்றைத் தவிரப் பொதுக் காரணி இருக்க முடியாது. ஆகையால் அவைகளின் உத்தமப் பொதுக் காரணி 1. ஆகையால்

$1 = xr + yp$, (x, y முழு எண்கள்) என எழுத முடியும் என்கிற முடிவு சாதாரண இயற்கணிதத்தில் உள்ளது. ஆதலால்

$xr = 1 - yp$ என ஆகிறது. ஆகையால்

$xr \equiv 1$ (மட்டு p) ஆதலால்,

$[x] \cdot [r] = [1]$ என ஆகிறது. ஆதலால் $[r]$-க்குத் தகுந்த $[x]$ என்ற எதிர்ப் பொருள் I/p-ல் உள்ளது. ஆகையால் I/p என்பது ஒரு களமாகிறது.

தேற்றம் 4.19.

$r, s \in$ களம் F; மற்றும் $r \neq o$ என்ருல் $ry = s$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு, y என்ற பிரத்தியேகமான தீர்வு உள்ளது.

$ry = s$ ………(1)

$r \neq o$ என்கிறபடியாலும், F என்பது ஒரு களமானபடியாலும் r^{-1} என்ற எதிர்ப் பொருள் உள்ளது. ஆகையால்

$r^{-1} ry = r^{-1} s$

அல்லது $ey = r^{-1} s$ (e, ஒருமைப் பொருள்)
அல்லது $y = r^{-1} s$.

இது சமன்பாடு (1)-ன், தீர்வு. இத் தீர்வு பிரத்தியேகமானது எனக் காண்பிப்போம்.

முடிந்தால் y_1, y_2 என இரண்டு தீர்வுகள் இருக்கட்டும்.
$\therefore ry_1 = s$ மற்றும் $ry_2 = s$
$\therefore ry_1 = ry_2$. $r \neq o$ என்பதால் r^{-1} உண்டு.
$\therefore r^{-1} ry_1 = r^{-1} ry_2$ $\therefore ey_1 = ey_2$ $\therefore y_1 = y_2$.

தேற்றம் 4.20.

முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள பொருள்களைக் கொண்ட ஒரு முழுமை அரங்கம் S' ஒரு களம் (Field) ஆகிறது.

நிரூ : S-ல் பூச்சியமில்லாத பொருள்களின் கணம் S' என்க.

$S' = \{ a_1, a_2, \dots \dots a_k \dots a_n \}$ என்க.

இதில் $a_1\ a_2 \ldots\ldots\ldots a_n$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்டவை என்க. இவைகளில் a_k என்ற பொதுவான பொருளை எடுத்து ஒவ்வொன்றுடனும் பெருக்கி

$$A = \{ a_1\ a_k,\ a_2\ a_k, \ldots\ldots a_k\ a_k, \ldots\ldots a_n\ a_k \}$$

என்ற கணத்தை உருவாக்குவோம். S'-ல் பூச்சியப் பொருள் இல்லாத தால், A-யிலும் பூச்சியப் பொருள் இருக்கமுடியாது. மேலும் A-ன் பொருள்கள் வெவ்வேறானவை. இல்லாவிட்டால் $a_e\ a_k = a_s\ a_k$ என்றால், நீக்கல் விதியின்படி $a_e = a_s$ என ஆகும்.

இது கொள்கைக்கு விரோதமானது.

ஆகையால் $S' = A$ என ஆகிறது. S'-ல் ஓர் ஒருமைப் பொருள் e உண்டாகையால் A-யிலும் அதே ஒருமைப் பொருள் உண்டு. ஆகையால் ஏதோ ஒரு a_e க்கு $a_e\ a_k = e$ என ஆகிறது.

ஆகையால் a_k-க்கு a_e என்ற எதிர்ப் பொருள் உள்ளது. ஆகையால் S ஒரு களமாகிறது.

பயிற்சி

1. சாதாரணக் கூட்டல், பெருக்கல் இவற்றின் சார்பாகக் கீழ்க்கண்டவை வளையங்களா எனப் பார்க்கவும்:

(1) நேர் முழு எண்களின் கணம்.

(2) ஒற்றை (*odd*) நேர் முழு எண்களின் கணம்.

(3) மூன்றால் வகுபடக்கூடிய எல்லா முழு எண்களின் கணம்.

(4) $x + y\sqrt{2}$ என்ற உருவங் கொண்டதும், x, y ஆகியவை இரட்டை முழு எண்களாகவும் உள்ள மெய்யெண் கணம்.

(5) $x + y\sqrt{5}$ என்ற உருவங் கொண்டதும், x, y ஆகியவை முழு எண்களாகவும் உள்ள மெய்யெண் கணம்.

(6) $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ என்ற உருவம் கொண்டதும், x, y ஆகியவை முழு எண்களாகவும் உள்ள மெய்யெண் கணம்.

(7) $x + y\sqrt{3}$ என்ற உருவம் கொண்டதும், x, ஓர் இரட்டை முழு எண்ணாகவும், y ஒரு முழு எண்ணாகவும் உள்ள மெய்யெண் கணம்.

2. $T = \{0, 1\}$ என்ற கணத்தில் கூட்டலும், பெருக்கலும் பின்வருமாறு வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளன. T ஒரு வளையமா எனப் பார்.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

இவற்றுள் எது பூச்சியப் பொருள்? எது ஒருமைப் பொருள்?

3. $A = \{a, b, c, d,\}$ என்ற கணத்தில் கூட்டலும், பெருக்கலும் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளன. A, ஒரு பரிமாறு வளையமா? ஒருமைப் பொருள் உள்ளதா? பூச்சியப் பொருள் எது? ஒவ்வொரு பொருளின், கூட்டலில் எதிர்ப் பொருள் என்ன?

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

×	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	c

4. I என்ற முழு எண்களின் கணத்தில் கூட்டலும், பெருக்கலும் கீழ்க்கண்ட விதத்தில் வறையறை செய்யப்படுகிறது.

$$a \oplus b = a + b - 1 \; ; \quad a \otimes b = a + b - ab$$

இந்தச் செயல்களின் சார்பாக I, ஓர் ஒருமைப் பொருள் கொண்ட பரிமாறு வளையம் எனக் காண்பி. பூச்சியப் பொருள் என்ன?

5. R என்பது ஒருமைப் பொருள் கொண்ட ஒரு வளையம். R-ன் a, b என்ற இரண்டு பொருள்களுக்குப் பெருக்கலில் a^{-1}, b^{-1} என்ற எதிர்ப் பொருள்கள் உண்டு.

$(a\,b)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1}$ என நிரூபி.

6. மேலே கண்ட 3 ஆவது கணக்கில் உள்ள A என்ற வளையத்தின் ஏதாவது உள் வளையம், மேலே கண்ட 2 ஆவது கணக்கில் உள்ள T என்ற வளையத்துடன் ஒரே அமைப்பு (Isomorphic) கொண்டுள்ளதா எனப் பார்.

7. a, b, c, d என்பவை வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு முழுமை அரங்கத்தின் பொருள்கள்.

$a > b$; மற்றும் $c > d$ என்றால்

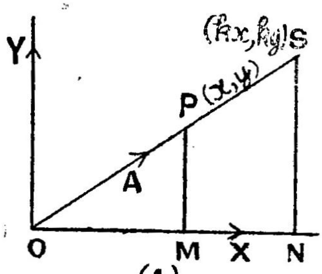
$a + c > b + d$ என நிறுவுக.

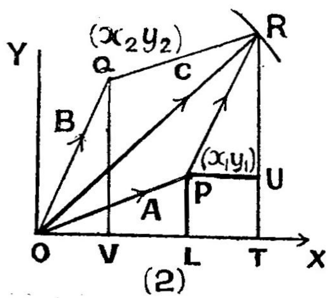
8. கீழ்க்கண்ட மீதக் கணங்களின் கூட்டல், பெருக்கல் அட்டவணைகளைத் தயார் செய்து, அவை வளையங்கள் எனக் காட்டவும். $I/2$, $I/3$, $I/4$, $I/6$, $I/7$- இவற்றுள் எவை முழுமை அரங்கங்கள் ?

5. வெக்டர் வெளிகள்

(Vector Spaces)

5.1. இடப் பெயர்ச்சி (displacement), திசைவேகம் (velocity) விசை (force) முதலிய பௌதிகப் பொருள்களுக்கு, அளவும் (magnitude), திசையும் (direction) உண்டு என நமக்குத் தெரியும். இப் பொருள்களுக்கு 'வெக்டர்கள்' என்பது பெயர். ஒரு வெக்டரை 'திசை கொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டால்' (directed segment of a line) குறிப்பிடலாம். இம் மாதிரியான பல வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தி லும் ஓர் ஆதியிலிருந்து கிளம்புவதாகவும் கொள்வோம்.





படம் 1-ல், OP என்ற திசை கொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டு ஒரு வெக்டர் 'A'ஐக் குறிக்கிறது. இதை $\vec{OP} = A$ என்று எழுதலாம். இந்த வெக்டரின் முனைப் புள்ளி (terminal point) P-ன் (x, y) என்ற ஆயத் தொலைகள் கொடுக்கப்பட்டால் வெக்டர் $\vec{OP}$, முழுவதுமாக நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. ஆகையால், A என்ற வெக்டரை வரிசைப் படுத்தப்பெற்ற இரண்டு எண்களால் (x, y) எனக் குறிப்பிடலாம். அதாவது $A = (x, y)$.

மேலும், OP ஐ, S என்ற புள்ளிக்கு $OS = K \cdot OP$, (k, ஒரு மெய் எண்) இருக்குமாறு நீட்டுவோம். $\vec{OS}$, $\vec{OP}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு திசை கொண்டன. ஆனால் $\vec{OS}$-ன் அளவு $\vec{OP}$-ன் அளவை விட 'k' மடங்கு அதிகம். ஆகையால் $\vec{OS} = k. \vec{OP}$ என எழுதலாம். வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து S-ன் ஆயத் தொலைகள் (kx, ky) என்று உணரலாம். ஆகையால், $k(x, y) = (kx, ky)$ எனக் கிடைக்கிறது.

படம் 2-ல் $A = \vec{OP} = (x_1, y_1)$ என்றும்,

$B = \vec{OQ} = (x_2, y_2)$ என்றும்

கருதுவோம். $OPRQ$ என்ற இணைகரத்தில் OR ஒரு மூலை விட்டம். பௌதிக வாயிலாக, $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ ஆகியவற்றின் கூடுதல் $\vec{OR}$ என நமக்குத் தெரியும். R-ன் ஆயத் தொலைகள் $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ எனப் படத்திலிருந்து சுலபமாக அறியலாம்.

ஆகையால், $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$ என்ற முடிவை

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

என எழுதலாம். இவ்விதமாக, இயற்கணித முறையில் A என்ற ஒரு வெக்டரை,

$$A = (x, y) \text{ என்றும்,}$$

வெக்டர் A ஐ, k என்ற ஒரு திசையிலி எண்ணால் **(Scalar)** பெருக்குவதை

$$kA = k(x, y) = (kx, ky) \text{ என்றும்,}$$

A, B என்ற இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதலை

$$A+B = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ என்றும்}$$

எழுதலாம் எனப் பார்த்தோம்.

5.2. இக் கருத்தைப் பொதுமைப்படுத்தி, n— வெக்டர் என்ற முற்றிலும் இயற்கணித வெக்டர் கீழ்க்கண்ட விதத்தில் வரையறுக்கப் படுகிறது.

$$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$$

இந்த வெக்டர், பௌதிகப் பொருள் ஒன்றையும் குறிப்பிடுவது அன்று. இதன் உட்பொருள்களாகிய (Components) $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்பவையும், மெய்யெண்களாகவோ, கலப்பு எண்களாகவோ அல்லது பொதுவான ஒரு களம் (Field), F ஐச் சார்ந்தனவாகவோ இருக்கலாம். இக் கருத்தை, வெக்டர் X, களம் F-ன் மேல் உள்ளது, (X is a vector over the field F) எனக் கூறுகிறோம். மேலும் வெக்டர் X-ல், n உட்பொருள்கள் இருப்பதால் இந்த வெக்டரின் வரிசை எண் (order) 'n' எனக் கூறுகிறோம். பொதுமைப்படுத்தப் பட்ட இந்த வெக்டர்களின் சமத்தன்மை, இவற்றைக் கூட்டுதல், கழித்தல் திசையிலி எண்ணால் பெருக்கல், பூச்சிய வெக்டர் (Zero vector) முதலியவை கீழே வரையறுக்கப்படுகின்றன.

1) ஒரே வரிசை எண்களுடைய இரண்டு வெக்டர்கள் X, Y சமம் என்றால் அவற்றின் உட்பொருள்கள் முறையே சமமாக இருத்தல் வேண்டும் அதாவது,

$$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n),$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n), \text{ மற்றும்}$$

$$X = Y \text{ என்றால்}$$

$$x_1 = y_1\,;\quad x_2 = y_2\,;\quad x_3 = y_3\,;\ \ldots\ldots;\ x_n = y_n$$

என்று இருத்தல் வேண்டும்.

2) n — வரிசை எண் கொண்ட பூச்சிய வெக்டர்

$0 = (0, 0, 0, \ldots\ldots\ 0)$ எனப்படுகிறது.

3) X என்ற வெக்டரை k என்ற திசையிலி எண்ணால் பெருக்க $k\,X$ என்ற கீழ்க்கண்ட வெக்டர் கிடைக்கிறது.

$$k\,X = (k\,x_1, k\,x_2, \ldots\ldots, k\,x_n) \;=\; X\,k.$$

4) X, Y என்ற இரண்டு வெக்டர்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு கூட்டுகிறோம்.

$$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n) \text{ என்றால்}$$

$$X + Y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots\ldots, x_n + y_n).$$

5) X, Y என்ற ஒரே வரிசை எண் உடைய எந்த இரண்டு வெக்டர்களை எடுத்தாலும்,

$X + Z = Y$ என்று இருக்குமாறு Z என்ற பிரத்தியேகமான வெக்டர் உள்ளது.

இந்த Z என்பது $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots\ldots, y_n - x_n)$ என இருத்தல் வேண்டும். ஏனென்றல்,

$$X + Z = (x_1 + y_1 - x_1, \; x_2 + y_2 - x_2, \ldots\ldots, x_n + y_n - x_n)$$

$= (y_1, y_2, \ldots\ldots y_n) = Y$ என ஆகிறது.

ஆகையால், Z என்ற வெக்டர்

$Z = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots\ldots, y_n - x_n)$ என்றும்,

அல்லது $Z = Y - X$ என்றும், Z என்பது Y, X இவைகளின் வித்தியாசம் என்றும் சொல்லப்படுகிறது.

6) இதே முறையில் $-X$ என்ற வெக்டர் $0, X$ என்பவைகளின் வித்தியாசம். அதாவது $-X = 0 - X$

$= (0 - x_1, \; 0 - x_2, \ldots\ldots 0 - x_n)$

$= (-x_1, \; -x_2, \ldots\ldots, -x_n)$ என ஆகிறது.

5.3. மேற்கண்ட வரையறைகளைப் பின்பற்றிக் கீழ்க்கண்ட சில முடிவுகளை உணரலாம் :

1) $X + Y = Y + X$

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1 + y_1, \; x_2 + y_2, \ldots\ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \; y_2 + x_2, \ldots\ldots, y_n + x_n) \\ &= Y + X. \end{aligned}$$

2) $(X + Y) + Z = [(x_1 + y_1) + z_1, \; (x_2 + y_2) + z_2, \ldots\ldots, (x_n + y_n) + z_n]$

$$\begin{aligned} &= [x_1 + (y_1 + z_1), \; x_2 + (y_2 + z_2), \ldots\ldots, x_n + (y_n + z_n)] \\ &= X + (Y + Z) \end{aligned}$$

3) $1X = (1.x_1, \; 1.x_2, \ldots\ldots, 1.x_n)$

$= (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = X$

4) $(-1)X = (-x_1, \; -x_2, \ldots\ldots, -x_n)$

$= -X$

5) $O X = (o \cdot x_1, \; o \cdot x_2, \ldots\ldots\ldots, o \cdot x_n)$

$= (o, o, o, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots o) \; = O$

6) $\alpha O = (\alpha \cdot 0, \; \alpha \cdot o, \ldots\ldots\ldots, \alpha \cdot o)$

$= (o, o, o, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots o) \; = O$

7) $(\alpha \beta) X = (\alpha \beta x_1, \; \alpha \beta x_2, \ldots\ldots, \alpha \beta x_n)$

$= \alpha (\beta x_1, \; \beta x_2, \ldots, \beta x_n)$

$= \alpha (\beta X)$

8) $X - X = (x_1 - x_1, \; x_2 - x_2, \ldots\ldots, x_n - x_n)$

$= (o, o, \ldots\ldots o) = O$

9) $-(-X) = -(-x_1, \; -x_2, \ldots\ldots, -x_n)$

$= (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$

$= X$

10) $\alpha (X + Y) = \alpha (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\ldots, x_n + y_n)$

$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots\ldots, \alpha x_n + \alpha y_n)$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots\ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots\ldots, \alpha y_n)$

$= \alpha (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) + \alpha (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$= \alpha X + \alpha Y.$

11) $(\alpha + \beta) X = (\alpha + \beta) [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]$

$= [\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \ldots\ldots, \alpha x_n + \beta x_n]$

$= [\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots\ldots \alpha x_n] + [\beta x_1, \beta x_2, \ldots\ldots, \beta x_n]$

$= \alpha [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n] + \beta [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]$

$= \alpha X + \beta X$

12) ஒரே வரிசை எண் உடைய முடிவுள்ள பல வெக்டர்களின் ஒரு படித்தான சேர்க்கை (linear combination) அதே வரிசை எண்ணுடைய மற்றொரு வெக்டராகும்.

உதாரணமாக,

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z$$
$$= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1, \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n)$$

5.4. இம்மாதிரியான பொது வெக்டர்களை மேலும் பொதுமைப்படுத்தி ஒரு வெக்டரை முற்றிலும் அருவமான (**Abstract**) பொருளாகக் கருதி அவைகளின்மேல் சில செயல்களை மாத்திரம் வரையறுத்துப் பல தன்மைகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்தச் செயல்கள் மேலே கண்ட முடிவுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டவைகள்தாம். அருவமான வெக்டர்களின் தன்மைகள், உருவங்கொண்ட வெக்டர்களுக்கும் பொருந்தும். இனிமேல் இந்த அத்தியாயத்தின் பெரும் பகுதியிலும் அருவமான வெக்டர்களைத்தான் (**Abstract Vectors**) பார்க்கப்போகிறோம்.

5.5. 'வெக்டர் வெளி'யின் வரையறை (Definition of Vector Space)

F என்பது திசையிலிகளின் (Scalars) ஒரு களம் (Field) என்க. X, Y, Z போன்ற அருவமான பொருள்களின் ஒரு கணம் V என்க.

(i) F-ஐச் சார்ந்த α என்ற எந்தப் பொருளையும் எடுத்து, V-ன் எந்தப் பொருள் X உடன் இணைத்தால் αX என்பது V-ன் பிரத்தியேகப் பொருளாகவும்,

(ii) V-ஐச் சார்ந்த X, Y என்ற எந்த இரண்டு பொருள்களுக்கும் தகுந்த $X + Y$ என்ற ஒரு பிரத்தியேகப் பொருள் V-ல் உள்ளதாகவும் இருந்து,

மேலும் கீழ்க்கண்ட ஏழு தன்மைகளும் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டால், V என்பது F-ன் மேலுள்ள ஒரு வெக்டர் வெளி (Vector space) எனப்படுகிறது.

(1) $X + Y = Y + X$

(2) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

(3) $y + U = X$ என்ற சமன்பாட்டில் U-ன் பிரத்தியேகமான தீர்வு உள்ளது.

(4) $(\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X$; $(\alpha, \beta, \in F)$

(5) $\alpha (X + Y) = \alpha X + \alpha Y$; (......,, ...)

(6) $(\alpha \beta) X = \alpha (\beta X)$; (......,, ...)

(7) $1 X = X$.

5.6. வெக்டர் உள் வெளி (Vector subspace)

V என்ற வெக்டர் வெளியில் V' என்ற உட்கணம், திசையிலி யினால் பெருக்கல், கூட்டல் என்ற அதே செயல்களின் சார்பாகத் தனக்குள்ளாகவே ஒரு வெக்டர் வெளி ஆனால், V' என்பது V-ன் ஒரு வெக்டர் உள் வெளி எனப்படுகிறது.

5.7. வெக்டர் வெளியின் பிறப்பாக்கிகள் (Generators of a Vector Space)

V என்ற வெக்டர் வெளியின் எந்தப் பொருள் X-ம், V-ஐச் சார்ந்த $X_1, X_2, X_3 \ldots . X_n$ என்ற பொருள்களின் ஒருபடித்தான சேர்க்கை யாக (Linear Combination) இருந்தால், அதாவது

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots\ldots + \alpha_n X_n; \; (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \in F)$$

என்று இருக்குமானால், $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பவைகள் V-ன் பிறப்பாக்கி கள் எனப்படுகின்றன. V-ம், $X_1, X_2 \ldots X_n$ ஆகியவைகளால் பிறப்பிக்கப் படுகிறது.

வெக்டர் வெளியின் வரையறையில் ஏற்றுக் கொண்ட ஏழு தன்மைகளையும் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட தேற்றங்களை (1-லிருந்து 6 வரை) நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 5.1.

V-ன் எந்தப் பொருள் X-ஐ எடுத்தாலும் $X + 0 = X$ என்று இருக்குமாறு 0 என்ற பூச்சியப் பொருள் V-ல் பிரத்தியேகமாக உள்ளது.

நிறுவல்: X_0 என்ற V-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளை எடுப்போம்.

(I) $X_0 + 0 = X_0$ என்று இருக்குமாறு, 0 என்ற பொருள் உண்டு …… தன்மை (3).

X என்ற பொதுவான பொருளை எடுப்போம்.

(II) $X_0 + Y = X$ என்று இருக்குமாறு Y என்ற பொருள் உண்டு ... தன்மை (3).

$$\begin{aligned} X + 0 &= (X_0 + Y) + 0 \\ &= (Y + X_0) + 0 \;\ldots\ldots\; \text{தன்மை (1)} \\ &= Y + (X_0 + 0) \\ &= Y + X_0 \quad \ldots \; (I) \\ &= X_0 + Y \quad \ldots \; \text{தன்மை (1)} \\ &= X \quad \ldots \;\ldots \; (II) \end{aligned}$$

ஆகையால் 0 என்ற பூச்சியப் பொருள் V-ல் இருக்கிறது. இது பிரத்தியேகமானது என நிரூபிப்போம். முடிந்தால் 0, 0′ என்ற இரண்டு பூச்சியப் பொருள்கள் இருக்கட்டும்.

0′ என்பதைப் பூச்சியப்பொருளாகக் கொண்டால்,

$0+0'=0$ என ஆகிறது ......(III)

0 என்பதைப் பூச்சியப் பொருளாகக் கொண்டால்

$0'+0=0'$ என ஆகிறது.

அதாவது $0+0'=0'$ ...(IV) (தன்மை 1)

III, IV ஆகியவைகளிலிருந்து $0' = 0$ என ஆகிறது.

ஆகையால் பூச்சியப் பொருள் V-க்கு ஒன்றுதான்.

தேற்றம் 5.2.

$X + U = Y + U$ ஆனுல், $X=Y$

நிறுவல்:

$U + U' = 0$ என இருக்குமாறு U' என்ற பொருளைக் கருதவும்.

$X + U = Y + U$ ... கொள்கை

$X + (U + U') = y + (U + U')$

அல்லது $X + 0 = Y + 0$

அல்லது $X = Y$.

தேற்றம் 5.3.

$Y + U = X$ என்ற சமன்பாட்டில் U என்ற தீர்வு பிரத்தியேகமானது.

நிறுவல்:

முடிந்தால் U' என்ற மற்ருெரு தீர்வு இருக்கட்டும்.

ஆகையால் $Y + U' = X$.

ஆகையால், $Y + U = Y + U'$

ஆகையால் $U + Y = U' + Y$

ஆதலால் $U = U'$... . தேற்றம் (2)

5.8. வரையறை

$Y + U = X$ என இருந்தால் U-க்கு X, Y ஆகியவைகளின் வித்தியாசம் என்பது பெயர். மேலும் $U = X - Y$ என எழுதப்படுகிறது. ஆகையால் '$X - Y$' என்று கொடுக்கப்பட்டால், இப் பொருளை Y உடன் சேர்த்தால் X கிடைக்கும் எனப் பொருள்படுகிறது. குறிப்பாக, '$0 - X$' என்பதை '$-X$' எனக் குறிக்கிறோம். '$-X$' என்று கொடுக்கப்பட்டால் இதை 'X' உடன் சேர்த்தால் 0 கிடைக்கும் என்பது பொருள்.

தேற்றம் 5.4.

(1) $X - Y = X + (-Y)$ என்றும்

(2) $X - X = 0$ என்றும் நிறுவுக.

(1) $Y + (-Y) = 0$ ... 'Y'-ன் வரையறை

அல்லது $(-Y) + Y = 0$ ... தன்மை (1)

$X + (-Y) + Y = X + 0$

அல்லது $[X + (-Y)] + Y = X$

அல்லது $Y + [X + (-Y)] = X$

ஆகையால் $X + (-Y) = X - Y$

(2) $X - X = X + (-X)$ → 5.4 (1)-ன்படி

$= 0$ → $-X$-ன் வரையறையின்படி

தேற்றம் 5.5.

V-ன் எந்தப்பொருள் X-க்கும், F ன் எந்தப்பொருள் α-க்கும்,

(1) $0X = 0$ எனவும், (2) $\alpha 0 = 0$ எனவும் நிறுவுக.

நிறுவல் :

(1) $\alpha X + 0X = (\alpha + 0)X$ .... தன்மை 4

$= \alpha X = \alpha X + 0$

ஆகையால், $0X = 0$ என ஆகிறது.

(2) $\alpha X + \alpha 0 = \alpha (X + 0)$ .... தன்மை 5

$= \alpha X$

$= \alpha X + 0$

ஆகையால், $\alpha 0 = 0$ என ஆகிறது.

தேற்றம் 5.6.

$X \in V$;

(1) $(-1)X = -X$, (2) $-(-X) = X$ என நிறுவுக.

நிறுவல் :

$$(1)\quad X + (-1)X = 1X + (-1)X = [1 + (-1)]X = 0X = 0$$

ஆகையால், $(-1)X = 0 - X = -X$

(2) $X + (-X) = 0$

அல்லது, $(-X) + X = 0$

ஆதலால் $X = 0 - (-X) = -(-X) = X$

5.9. ஒருபடித்தான சார்பு ஒ.ப.சா. உடைமை (Linear Dependence), மற்றும் ஒருபடித்தான சார்பு (ஒ.ப.சா.) இன்மை (Linear Independence)

வரையறை :

எல்லாம் பூச்சியமல்லாத $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ என்ற k திசையிலிகளுக்குத் தகுந்தவாறு

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots\ldots + \alpha_k X_k = 0$$

என்று இருக்குமானால், $X_1, X_2, \ldots, X_k$ என்ற பொருள்கள் ஒரு படித்தான சார்பு (ஒ.ப.சா.) கொண்டவை எனப்படுகின்றன.

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k = 0$ என்று கொள்ளும்போது,

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_k$ என்பவை எல்லாம் பூச்சியங்களாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும் என்ற முடிவு ஏற்பட்டால், $X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$ என்பவைகள் ஒருபடித்தான சார்பு (ஒ.ப.சா.) இல்லாதவை எனப்படுகின்றன.

இந்த ஒருபடித்தான சார்பு உடைமை, ஒருபடித்தான சார்பு இன்மை புதுமுறை இயற்கணிதத்தில் மிகவும் முக்கியமான கருத்துகள்.

தேற்றம் 5.7.

X_1, X_2, X_3 ....முதலியவை V என்ற வெக்டர் வெளி யின் பொருள்கள். கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்:

(1) $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_m$, என்ற பொருள்களில் ஒரு பொருள் பூச்சியப் பொருளானாலும், இந்தப் பொருள்கள் ஒருபடித் தான சார்புடையவை.

(2) $X_1, X_2, \ldots, X_m$ இவைகள் ஒருபடித்தான சார்பு உள்ளவை களானால் $X_{m+1}\ X_{m+2}, \ldots$ போன்ற வேறு எந்தப்பொருள் களை இக்கணத்துடன் சேர்த்தாலும், புதிய கணமும் ஒரு படித்தான சார்பு உடையது.

(3) $X_1, X_2, \ldots, X_m$ என்ற பொருள்கள் ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாதவைகளானால், இவைகளின் எந்த உட் கணமும் ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாதது.

(4) ஒரே ஒரு பொருள் X ஐ எடுத்தால், இது பூச்சியப் பொருளானால் ஒருபடித்தான சார்பு உடையது என்றும், பூச்சியப் பொருளாக இல்லாவிட்டால், ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாதது என்றும் ஆகிறது.

நிறுவல் :

(1) X_1 என்பது பூச்சியப் பொருள் என்க.

$$\alpha_1 X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + \ldots + 0 \cdot X_m$$

$= \alpha_1 X_1 = \alpha_1 0 = 0\ (\alpha_1 \neq 0)$ எனக் கிடைக் கிறது. ஆகையால், திசையிலிகள் எல்லாம் பூச்சியங்கள் அல்ல. ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட கணம் ஒரு படித் தான சார்புடையது.

(2) $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ஒருபடித்தான சார்பு உடையன என் பேரம். ஆதலால்

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0$ என்ற முடிவில் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_y, \ldots \alpha_m$ இவைகளில் எல்லாம் பூச்சியங் களல்ல. உதாரணமாக $\alpha_j \neq 0$ எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது

$$\alpha_j X_j + \ldots \alpha_j x_j + \ldots + \alpha_m x_m + 0\, x_{m+1} + 0\, x_{m+2} + \ldots 0.\, x_{m+r} = 0$$

இதில் ஒரு திசையிலி $\alpha_j \neq 0$ என உள்ளது.

ஆகையால் $X_1, X_2, \ldots\ldots X_m, \ldots X_{m+r}$ என்ற பெரிய கணமும், ஒருபடித்தான சார்பு உடையது.

(3) $X_1, X_2 \ldots X_m$, ஓ.ப.சா. இல்லாதவைகள். இவைகளின் ஓர் உட்கணம் $(X_1, X_2, \ldots X_i)$ என்க. இதுவும் ஓர் ஓ. ப. சா. இல்லாத கணமாக இருத்தல் வேண்டும். ஏனெனில், இது ஓ. ப. சா. கொண்டதானல், $X_1, X_2, \ldots X_m$ என்ற முழுக்கணமும் (2)-ன்படி ஓ.ப.சா. கொண்டதாக இருத்தல் வேண்டும். இது கொள் கைக்கு விரோதமானது. ஆகையால் உட்கணம் ஓ. ப. சா. இல்லாததாக இருத்தல் வேண்டும்.

(4) ஒரு பொருள் X-ஐ எடுக்கவும். இது பூச்சியப் பொரு ளானல் $\alpha X = 0, \alpha \neq 0$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆத லால் X, ஒருபடித்தான சார்பு உடையது.

X, ஒரு பூச்சியப் பொருள் அல்ல என்க.

இப்பொழுது $\alpha X = 0$ என்ருல், $\alpha = 0$ என்றுதான் இருக்க வேண்டும். ஆதலால் X, ஓர் ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாதது.

மாதிரி 1 : கீழ்க்கண்ட வெக்டர்கள் ஒருபடித்தான சார்பு உடையவைகளா, அல்லவா எனப் பார்க்கவும் :

(1) (1, 3, 2), (2, 1, 0), (0, 5, 4)

(2) (−1, 2, 1) (3, 1, −2)

(1) $\alpha_1 (1, 3, 2) + \alpha_2 (2, 1, 0) + \alpha_3 (0, 5, 4) = 0$ என்க.

ஆதலால் $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ —— I

$3\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0$ —— II

$2\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0$

அல்லது $\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$ —— III

$\alpha_2 = 1$ என்க ; $\alpha_1 = -2$

II $\rightarrow -6 + 1 + 5\alpha_3 = 0$

அல்லது $\alpha_3 = 1$

III → $-4+4=0$ என்று சரியாகிறது.
ஆகையால், எல்லாம் பூச்சியமில்லாத $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ கிடைக்கின்றன.
ஆதலால் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒருபடித்தான சார்பு உடையவைகள் ஆகும்.

(2) $\alpha_1(-1, 2, 1) + \alpha_2(3, 1, -2) = 0$ என்க.

ஆதலால், $-\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ என்பதைத் தவிர வேறு தீர்வுகள் கிடையாது என்பதைப் பார்க்கலாம். ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாதவைகள்.

5·10. வெக்டர் வெளியின் ஆதாரக் கணம் (Basis of a Vector Space)

V என்ற ஒரு வெக்டர் வெளியில், $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ என்ற ஒரு கணம் கீழ்க்கண்ட தன்மையுடையதாக இருந்தால் அதற்கு V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் (Basis) என்பது பெயர்.

V-ன் எந்தப் பொருள் X ஐ எடுத்தாலும், அது, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ என்பவைகளின் பிரத்தியேகமான ஓர் ஒருபடித்தான சேர்க்கையாக இருத்தல் வேண்டும் (X should be a unique linear combination of the members of the basis). அதாவது,

$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots\ldots + \alpha_k X_k$. இதில் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_k$, X-க்குப் பிரத்தியேகமானவை. இந்த வெக்டர் $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ என்பது, ஆதாரக் கணம் B-ன் சார்பாக X-ன் ஆய வெக்டர் (Coordinate vector) எனப்படுகிறது. அதாவது $\alpha = R[X; B]$

உதாரணம் : வரிசை எண் 'n' கொண்ட வெக்டர்களின் முழு வெக்டர் வெளி V_n-ன் (Total vector space V_n) ஆதாரக் கணம் கீழே கண்ட வெக்டர்களைக் கொண்டது.

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots\ldots\ldots 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots\ldots\ldots 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \ldots\ldots\ldots 0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \ldots\ldots\ldots 1)$$

ஏனெனில், X என்ற V_n-ன் எந்த வெக்டரையும் எடுப்போம்.

$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ என்க.

இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம் :

$$X = x_1 (1\ 0\ 0\ 0 \ldots \ldots \ldots 0)$$
$$+ x_2 (0\ 1\ 0\ 0 \ldots \ldots \ldots 0)$$
$$+ x_3 (0\ 0\ 1\ 0 \ldots \ldots \ldots 0)$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ x_n (0\ 0\ 0 \ldots \ldots \ldots \ldots 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

இதே போல, $Y = (y_1, y_2, \ldots \ldots, y_n)$ என்பதை

$Y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$ என எழுதலாம்.

ஆகையால் V_n-ன் எந்த வெக்டரையும், $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ஆகியவை களின் ஒருபடித்தான சேர்க்கையாக, பிரத்தியேகமான முறையில் எழுதலாம், ஏனெனின், ($x_1, x_2, \ldots x_n$ ஆகியவைகள் X-ன் பிரத்தி யேகமான உட்பொருள்கள்). ஆகையால்,

$(e_1, e_2, \ldots . e_n)$ ஓர் ஆதாரக் கணமாகிறது. இதற்கு V_n-ன் சிறப்பான ஆதாரக் கணம் E (Special Basis of V_n) என்பது பெயர்.

தேற்றம் 5.8.

வெக்டர் வெளி V-ன் எந்த ஆதாரக் கணமும் ஒருபடித் தான சார்பு இல்லாத பிறப்பாக்கிகளைக் கொண்டது. மறுதலையும் உண்மை.

$B = \{X_1, X_2, \ldots \ldots \ldots, X_k\}$ என்பது V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்க. ஆதலால் V-ன் எந்தப் பொருளும் இவைகளின் பிரத்தி யேகமான ஒருபடித்தான சேர்க்கையாக இருத்தல் வேண்டும். பூச்சியப் பொருள் 0 ஐ எடுப்போம்.

$o X_1 + o X_2 + \ldots \ldots + o X_k = 0$ என்பது உண்மை.

ஆகையால் 0 என்ற பொருளுக்குப் பிரத்தியேகமான திசையிலிகள்,

0, 0, ……… 0 என ஆகின்றன. ………I

இப்பொழுது, $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots \ldots + \alpha_k X_k = 0$ என்போம்.

(I)-ன் படி, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \ldots = \alpha_k = 0$ என ஆகிறது.

ஆகையால், $X_1, X_2 \ldots \ldots, X_k$, ஒருபடித்தான சார்பில்லாதவைகள்.

மறுதலையாக, $X_1, X_2, \ldots \ldots X_k$ ஒருபடித்தான சார்பில்லாதவைகள் என்க. X என்ற பொதுப் பொருளை

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots \ldots + \alpha_k X_k \text{ என்போம்.}$$

முடிந்தால், $X = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots\ldots + \beta_k X_k$ என்போம்.

$$X - X = 0 = (\alpha_1 - \beta_1) X_1 + (\alpha_2 - \beta_2) X_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k) X_k$$

$X_1, X_2 \ldots\ldots X_k$ ஒருபடித்தான சார்பில்லாததால்,

$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots\ldots = \alpha_k - \beta_k = 0$ அல்லது

$\alpha_1 = \beta_1;\ \alpha_2 = \beta_2;\ \ldots\ldots;\ \alpha_k = \beta_k$ என ஆகிறது.

ஆகையால் X-ன், β-ன் சார்பாக உள்ள ஒருபடித்தான சேர்க்கை பிரத்தியேகமானது.

5.11. வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம்

(Dimensionality of a Vector space)

ஒரு வெக்டர் வெளியில் ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாத பொருள்கள் எவ்வளவு அதிகமாக இருக்க முடியுமோ அந்த மீப்பெரு எண்ணிக்கைக்கு, வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம்(Dimensionality)என்பது பெயர். இது $d(V)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. [$d(V)$ = the maximum number of linearly independent elements of V]. இத்தகைய மீப்பெரு எண் எதுவும் இல்லாவிடில், வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் 'கந்தழி' என்போம்.

மாதிரி 2: $d(V_2) = 2$ எனக் காண்பிக்கவும்.

V_2 என்பது, வரிசை எண் 2 உடைய எல்லா வெக்டர்களின் கணம்

V_2-ல் $e_1 = (1, 0);\ e_2 = (0, 1)$ என இரண்டு வெக்டர்கள் உள்ளன.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \alpha_1 (1, 0) + \alpha_2 (0, 1) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ என்பது பூச்சியப் பொருளுக்குச் சமமானால் $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால் e_1, e_2 ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாதவைகள். எவையேனும் மூன்று வெக்டர்கள், $X_1 = (x_1, y_1)$; $X_2 = (x_2, y_2)$; $X_3 = (x_3, y_3)$ எடுப்போம்.

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$ என்போம்.

அதாவது, $\alpha_1 (x_1, y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2) + \alpha_3 (x_3, y_3) = 0$

ஆகையால், $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ —— I

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$ —— II என ஆகிறது.

இவைகளுடன், $\alpha_1 . 0 + \alpha_2 . 0 + \alpha_3 . 0 = 0$ —— III என ஒரு சமன்பாட்டை எழுதலாம்.

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளின் அணிக்கோவை

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ என ஆகிறது.

ஆகையால் α_1, α_2, α_3 ஆகியவைகளுக்குப் பூச்சியமல்லாத தீர்வுகள் உண்டு. ஆகையால்,

X_1, X_2, X_3 ஒருபடித்தான சார்பு உடையவைகள். இதேபோல எந்த மூன்று வெக்டர்களை எடுத்தாலும் அவைகள் ஒருபடித்தான சார்பு உடையவைகள் எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால் V_2 என்ற வெக்டர் வெளியில், ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாத பொருள்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை இரண்டுதான். ஆகையால் $d(V_2) = 2$. இதேபோல, $d(V_3) = 3$; …… .. $d(V_n) = n$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

தேற்றம் 5.9.

V என்ற வெக்டர் வெளியின் ஓர் ஆதாரக் கணத்தில் 'r' பொருள்கள் இருக்குமானால், $d(V) = r$ என்றும், எந்த ஆதாரக் கணத்திலும், r பொருள்கள் இருக்குமென்றும் நிறுவுக.

மேலும், மறுதலையாக $d(V) = r$ என்றால், Vக்கு r பொருள்கள் கொண்ட ஓர் ஆதாரக் கணம் உண்டென்றும், ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாத எந்த r பொருள்களும் V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணமாகின்றன எனவும் காட்டவும்.

நிறுவல்:

$$B = \{E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots\ldots, E_r\}$$

என்பது V-ன் 'r' பொருள்கள் கொண்ட ஆதாரக் கணம் என்க.

V ஐச் சார்ந்த X_1, X_2, X_3, ……, X_r, X_{r+1} என்ற எவையேனும் $(r+1)$ பொருள்களை எடுப்போம்.

B ஓர் ஆதாரக் கணமானதால், கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்:

$$X_1 = a_{11} E_1 + a_{21} E_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{r1} E_r$$

$$X_2 = a_{12} E_1 + a_{22} E_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{r2} E_r$$

…………… ……………………………

…………………………………………

$$X_r = a_{1r} E_1 + a_{2r} E_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{rr} E_r$$

$$X_{r+1} = a_{1,r+1} E_1 + a_{2,r+1} E_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{r,r+1} E_r$$

$$t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots\ldots + t_r X_r + t_{r+1} X_{r+1} = 0 \text{ --- } (I)$$

என்போம். (இதில் $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_{r+1}$ என்பவைகள் திசையிலிகள்.)

ஆகையால், $E_1 (a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + \ldots\ldots + a_{1, r+1} t_{r+1})$

$$+ E_2 (a_{21} t_1 + a_{22} t_2 + \ldots\ldots + a_{2, r+1} t_{r+1})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ E_r (a_{r1} t_1 + a_{r2} t_2 + \ldots\ldots + a_{r, r+1} t_{r+1}) = 0$$

ஆகையால் $a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + \ldots\ldots + a_{1, r+1} t_{r+1} = 0$

$$a_{21} t_1 + a_{22} t_2 + \ldots\ldots + a_{2, r+1} t_{r+1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{r1} t_1 + a_{r2} t_2 + \ldots\ldots + a_{r, r+1} t_{r+1} = 0$$

இவைகளுடன் $0. t_1 + 0. t_2 + \ldots\ldots + 0. t_{r+1} = 0$

என எழுதுவோம்.

ஆகையால்

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1\ r+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2\ r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r_2} & \ldots\ldots & a_{r, r+1} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ஆகையால் $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_{r+1}$ ஆகியவைகளுக்கு எல்லாம் பூச்சிய மல்லாத மதிப்புகள் உண்டு ஆகையால் I-லிருந்து $X_1, X, \ldots X_{r+1}$ ஆகியவை ஒருபடித்தான சார்பு கொண்டவை. ஆகையால் எந்த $(r+1)$ பொருள்களும் ஒ. ப. சா. கொண்டவை. ஆனால் $E_1, E_2, \ldots E_r$ என்ற r பொருள்கள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவை. $d(V) = r$ எனக் கிடைக்கிறது.

மேலும் எந்த ஆதாரக் கணத்திலும் r பொருள்கள்தாம் இருத்தல் வேண்டும். ஏனெனின், ஓர் ஆதாரக் கணத்தில் 's' பொருள்கள் இருக்கட்டும். ஆதலால் $d(V) = s$ என ஆகிறது. ஆனால் $d(V) = r$ என நிரூபித்தோம். ஆகையால் $s = r$ என ஆகிறது. ஆதலால் எந்த ஆதாரக் கணத்திலும் r பொருள்கள்தாம் இருத்தல் வேண்டும்.

மறுதலையின் நிரூபணம் :

$$d(M) = r \ldots \ldots \text{ (கொள்கை)}$$

$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_r$ ஒ. ப. சா. இல்லாத r பொருள்கள் எனக் கொள்வோம். X என்ற V-ன் வேறு ஒரு பொருளை எடுப்போம்.

$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_r, X$ என்பவை ஓ. ப. சா. கொண்டவை. ஆகையால், $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \alpha$ என்ற, எல்லாம் பூச்சியமல்லாத $(r+1)$ திசையிலிகளைக் கொண்டு $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots\ldots + \alpha_r E_r + \alpha X = 0$ என எழுத முடியும். இதில், $\alpha = 0$ என இருத்தல் முடியாது; ஏனெனின், அப்பொழுது $E_1, E_2, \ldots\ldots E_r$ என்பவை ஓ. ப. சா. கொண்டவைகள் என முடியும். இப்பொழுது,

$$X = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) E_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha}\right) E_2 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_r}{\alpha}\right) E_r$$

என எழுதலாம்.

ஆகையால், $E_1, E_2, \ldots, E_r$ என்பவைகள் ஓ. ப. சா. இல்லாத பிறப்பாக்கிகள் என ஆகிறது. ஆகையால் $\{E_1, E_2, \ldots E_r\}$ என்பது ஓர் ஆதாரக் கணமாகிறது.

இதேபோல, வேறு எந்த ஓ. ப. சா. இல்லாத r பொருள்களை எடுத்தாலும் அவை ஓர் ஆதாரக் கணமாகின்றன.

5.12. **8, 9** தேற்றங்கள், இவைகளின் மறுதலைகள், இவைகளின்கள் ஆகியவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு தொகுத்து எழுதலாம்.

1. வெக்டர் வெளி V-ன் எந்த ஆதாரக் கணமும் ஓ.ப.சா. இல்லாத பிறப்பாக்கிகளைக் கொண்டது.
2. ஓ. ப. சா. இல்லாத பிறப்பாக்கிகள், ஓர் ஆதாரக் கணமாகின்றன.
3. ஓர் ஆதாரக் கணத்தில், r பொருள்கள் இருந்தால் V-ன் பரிமாணம் $= r$. அதாவது $d(V) = r$.
4. ஓர் ஆதாரக் கணத்தில் r பொருள்கள் இருந்தால், எந்த ஆதாரக் கணத்திலும் r பொருள்கள் இருக்கும்.
5. V-ன் பரிமாணம் r என்றால், r பொருள்கள் கொண்ட ஆதாரக் கணம் V-ல் இருக்கும்.
6. V-ன் பரிமாணம் r என்றால், ஓ. ப. சா. இல்லாத எந்த r பொருள்களும் ஓர் ஆதாரக் கணமாகின்றன.

தேற்றம் 5·10.

ஒரு முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட V என்ற வெக்டர் வெளியில், ஓ. ப. சா. இல்லாத பொருள்களின் ஒரு கணம், ஓர் ஆதாரக் கணத்தின் பகுதியாகும்.

நிறுவல் :

$d(V) = r$ என்க. $X_1, X_2, X_3 \ldots X_k$ என்பவை ஓ. ப. சா. இல்லாத k பொருள்கள் என்க. $k = r$ என்றால் $X_1, X_2 \ldots X_k$ என்பவை ஓர் ஆதாரக் கணமாகும். $k < r$ என்க. $X_1, X_2, \ldots X_k$

ஆகியவைகளால் பிறப்பிக்கப்படும் பொருள்களின் உட்கணம் V' என்க. $X_1, X_2, \ldots, X_k$, V-ன் ஆதாரக் கணமாக இருத்தல் முடியாது என்பதால் V', V-ன் உட்கணந்தான் ஆகும். V'ஐச் சாராமலும், V-ல் உள்ளதாயும் இருக்குமாறு X_{k+1} என்ற ஒரு பொருளை எடுப்போம்.

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} X_{k+1} = 0$ என்க. $\alpha_{k+1} = 0$ என இருத்தல் வேண்டும். இல்லாவிட்டால் $X_{k+1} \in V'$ என ஆகும். ஆகையால்

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots \ldots + \alpha_k X_k = 0$ என ஆகிறது. $X_1, X_2, \ldots X_k$ ஆகியவை ஒ. ப. சா. இல்லாதவையாதலால் $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \ldots = \alpha_k = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால்

$X_1, X_2, \ldots \ldots, X_k, X_{k+1}$ ஆகியவைகள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவை என ஆகிறது.

இவ்விதமாக $X_1, X_2, \ldots X_k$ என்ற பொருள்களுடன் ஒ. ப. சா. இல்லாத மற்றொரு பொருள் X_{k+1} என்பதைக் கண்டுபிடித்தோம். இதே போல ஒ. ப. சா. இல்லாத பொருள்களைக் கூட்டிக் கொண்டு செல்லலாம். ஆனால் $d(V) = r$ என்பதால், மொத்தமாக

$X_1, X_2, \ldots X_k, X_{k+1}, \ldots, X_r$ என்ற r, ஒ. ப. சா. இல்லாத பொருள்களைத்தான் அடையமுடியும். இவைகள் ஓர் ஆதாரக் கணமாகின்றன. ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட பொருள்கள் ஓர் ஆதாரக் கணத்தின் ஒரு பகுதி எனக் கிடைக்கிறது.

5.13. வெக்டர் வெளி V-ல் நிரப்பி உள்-வெளிகள் (Complementary sub-spaces in the vector-spacev)

V-ன் இரண்டு உள்-வெளிகள் (sub-spaces) U, U' என்பன, கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டால், **நிரப்பிகள் (Complements)** எனப்படும்.

V-ன் எந்தப் பொருள் X-ம் பிரத்தியேகமான முறையில், U-ன் ஒரு பொருள் u, U'-ன் ஒரு பொருள் u', ஆகியவைகளின் கூடுதலாக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது $X = u + u'$ ($u \in U$; $u' \in U'$)

தேற்றம் 5.11.

U, U' என்பன V-ன் இரண்டு உள்-வெளிகள். அவைகளுக்குப் பொதுவான பொருள் 0 ஒன்றுதான். $Y_1 Y_2, \ldots, Y_r$ என்ற r பொருள்கள் U-ல் ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள். $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ என்ற s பொருள்கள் U'-ல் ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள். $Y_1, Y_2, \ldots Y_r, Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ என்ற $r + s$ பொருள்கள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவை என நிறுவலாம்.

நிறுவல்:

$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \ldots + \alpha_r Y_r + \beta_1 Z_1 + \ldots + \beta_s Z_s = 0$ என்க.

ஆதலால், $\alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_r' Y_r = -(\beta_1 Z_1 + \ldots + \beta_s Z_s)$

இடப் பக்கத்திலுள்ள வெக்டர், U ஐச் சார்ந்தது என்றும், வலப் பக்கத்திலுள்ள வெக்டர், U' ஐச் சார்ந்தது என்றும் தெரிகின் றது. இவைகள் சமமாக இருப்பதால், கொள்கையின்படி ஒவ் வொன்றும் பூச்சிய வெக்டராக இருத்தல் வேண்டும்

ஆதலால் $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \ldots + \alpha_r Y_r = 0$

மற்றும் $\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \ldots + \beta_s Z_s = 0$

ஆனால் $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ என்ற கணமும்,

$Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ என்ற கணமும் தங்களுக்குள் ஒ.ப.சா. இல்லாதவைகளானபடியால்,

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$ என்றும்

$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_s = 0$ என்றும் கிடைக்கின்றன. ஆகையால் $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_r, Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_s$ என்ற $(r+s)$ பொருள்களும் ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள்.

தேற்றம் 5.12.

U, U' என்ற V-ன் இரண்டு உள்வெளிகள் கீழ்க்கண்ட இரண்டு 'வேண்டிய, போதிய'(Necessary and Sufficient) நிபந்தனை களுக்குட்பட்டு 'நிரப்பிகள்' (Complements) ஆகின்றன:

(1) U, U^1 ஆகியவைகளுக்குப் பொதுவான வெக்டர் 0 ஒன்றுதான்.

(2) $d(U) + d(U') = d(V)$

$d(V) = n$ என்க. முதலில் U, U' ஆகியவை V-ல் உள்ள இரண்டு நிரப்பிகள் எனக் கொள்வோம். X என்ற ஒரு வெக்டர் U, U' இரண்டிலும் இருக்கட்டும். இப்பொழுது,

$$X - X + 0 \; (X \in U, \; 0 \in U')$$

$$X = 0 + X \; (0 \in U, \; X \in U')$$

என எழுதலாம். நிரப்பிகளின் வரையறையின்படி X-ன் விவரணம் பிரத்தியேகமாக இருத்தல் வேண்டும். ஆனால், இங்கு X-ன் விவர ணம் இரண்டு விதங்களில் உள்ளன. ஆதலால் இதைத் தவிர்க்க வேண்டும்.

அதற்கு $X = 0$ எனத்தான் இருத்தல் வேண்டும்.

[V-ன் பூச்சியப் பொருள் 0, V-ன் எந்த உள்வெளியின் பூச்சியப் பொருளாக உள்ளது.]

$$d(U) = r; \; d(U') = s \text{ என்க.}$$

$(Y_1 \; Y_2 \ldots Y_r)$, U-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்றும் $(Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_s)$, U'-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்றும் கொள்க. ஆகையால், $(Y_1 \ldots, Y_r)$ ஒ.ப.சா. இல்லாதவைகள், மற்றும் $(Z_1 \ldots\ldots Z_s)$ ஒ.ப.சா. இல்லாதவைகள். தேற்றம் 11-ன் படி, $(Y_1 \ldots Y_r, Z_1 \ldots\ldots Z_s)$ என்பவைகள் ஒ.ப.சா. இல்லாதவைகள் U, U' நிரப்பிகள் என்பதால் V-ன் எந்த X-ஐயும் $X = u + u'$ $(u \in U, u' \in U')$ என எழுதலாம். அதாவது $X = \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_r Y_r + \beta_1 Z_1 + \ldots\ldots + \beta_s Z_s$ ஆகையால் $Y_1 \ldots Y_r, Z_1, \ldots Z_s$ என்பவைகள் V-ன், ஒ.ப.சா. இல்லாத பிறப்பாக்கிகள்.

ஆகையால் இவைகள் V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணமாகின்றன. இதில் $(r + s)$ பொருள்களுள்ளபடியால் $d(V) = r + s$ என ஆகிறது. ஆகையால் $r + s = n$. அதாவது $d(U) + d(U') = d(V)$ எனக் கிடைக்கிறது.

மறுதலையின் நிறுவல் :

U, U' ஆகியவை V-ன் இரண்டு உள்வெளிகள். $d(U) + d(U') = d(V) = n$ என்றும், U, U' ஆகியவைகளுக்குப் பொதுவான பொருள் 0 ஒன்றுதான் எனவும் கொள்வோம். $d(U) = r$; $d(U') = s$ என்க. $(Y_1 \ldots Y_r)$, U-ன் ஓர் ஆதாரக் கணமென்றும் $(Z_1, \ldots Z_s)$, U'-ன் ஓர் ஆதாரக் கணமென்றும், கொள்வோம். $(Y_1 \ldots Y_r)$ ஒ.ப.சா. இல்லாதவை. $(Z_1 \ldots\ldots Z_s)$ ஒ.ப.சா. இல்லாதவை. U, U' ஆகியவைகளுக்கு 0 ஒன்றுதான் பொதுப்பொருள். ஆகையால் $(Y_1 \ldots Y_r \; Z_1 \ldots Z_s)$ ஒ. ப சா. இல்லாதவை. $r + s = n$ என்பதால் $(Y_1 \ldots Y_r, Z_1 \ldots Z_s)$ V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணமாகிறது. ஆகையால் V-ன் எந்த X-ஐயும் $X = (\alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_r Y_r) + (\beta_1 Z_1 + \ldots + \beta_s Z_s)$ என எழுதலாம். $= u + u'$ $(u \in U; u' \in U')$.

முடிந்தால் $X = v + v'$ $(v \in U; v' \in U')$ என எடுப்போம்.

ஆகையால் $0 = u + u' - v - v'$ எனக் கிடைக்கிறது.

அல்லது $0 = u - v + u' - v'$

அல்லது $u - v = v' - u'$

ஆனால் $u - v \in U$; மற்றும் $v' - u' \in U'$

ஆகையால் $u - v = 0$ என்றும் $v' - u' = 0$ என்றும் இருந்தல் வேண்டும். ஆகையால் $u = v$; $u' = v'$ எனக் கிடைக்கிறது

ஆகையால் V-ன் விவரணம் பிரத்தியேகமானது.

ஆகையால் U, U' ஆகியவை நிரப்பிகள்.

தேற்றம் 5.13.

V-ன் எந்த ஓர் உள்வெளிக்கும் நிரப்பி உண்டு.

$d(V) = n$ என்க. U, V-ன் ஓர் உள்வெளி என்க.
$d(U) = r$ என்க.
$(\Upsilon_1\ \Upsilon_2 \dots \Upsilon_r)$, U-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்க.
$\therefore\ \Upsilon_1, \Upsilon_2 \dots \Upsilon_r$ ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள்.

$d(V) = n$ என்பதால், $\Upsilon_{r+1}, \Upsilon_{r+2}, \dots \Upsilon_n$ என்ற, $(n-r)$ வெக்டர்களை $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots \Upsilon_r, \Upsilon_{r+1}, \Upsilon_{r+2}, \dots \Upsilon_n$ என்பன ஒ. ப. சா. இல்லாதவாறு கண்டுபிடிக்கலாம். ஆதலால் $\Upsilon_1, \dots \Upsilon_r, \Upsilon_{r+1}, \dots \Upsilon_n$ என்பவைகள் V-ன் ஆதாரக் கணமாகின்றன. $\Upsilon_{r+1}, \dots \Upsilon_n$ ஆகியவைகள் U' என்ற ஓர் உள்வெளியைப் பிறப்பிக்கட்டும்.

$d(U) + d(V) = r + n - r = n = d(V)$ எனக் கிடைக்கிறது. —I

U, U' -இவைகளுக்குப் பொதுவாக X என்ற வெக்டர் இருக்கட்டும்

$$X = \alpha_1 \Upsilon_1 + \dots + \alpha_r \Upsilon_r = \alpha_{r+1} \Upsilon_{r+1} + \dots + \alpha_n \Upsilon_n$$

அல்லது $\alpha_1 \Upsilon_1 + \dots + \alpha_r \Upsilon_r - \alpha_{r+1} \Upsilon_{r+1} - \dots - \alpha_n \Upsilon_n = 0$
$\Upsilon_1 \dots \Upsilon_r, \Upsilon_{r+1} \dots \Upsilon_n$ ஒ. ப. சா. இல்லாததால் $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r$ $\dots = \alpha_n = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகையால் $X = 0$ ஆதலால் U, U' ஆகியவைகளுக்குப் பொதுவான பொருள் 0 ஒன்றுதான். —II

(I), (II) லிருந்து U' என்பது U-ன் நிரப்பி எனக் கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 5.14.

U_1 U_2 ஆகியவை V-ன் உள்வெளிகள். $U_1 + U_2$ என்ற கணம் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது.

$$U_1 + U_2 = \{ X + \Upsilon ;\ X \in U_1,\ \Upsilon \in U_2 \}$$

கீழ்க்கண்டவைகளை நிரூபிக்கவும்.

(1) $U_1 + U_2$, V-ன் ஒரு வெக்டர் உள் வெளி.

(2) $U_1 \cap U_2$, V-ன் ஒரு வெக்டர் உள் வெளி.

(3) $d(U_1 + U_2) + d(U_1 \cap U_2) = d(U_1) + d(U_2)$.

நிரூபணம் :

(1) $A, B \in U_1 + U_2$ என்க.

ஆகையால் $A = X_1 + Y_1 \ (X_1 \in U_1 ; Y_1 \in U_2)$

$B = X_2 + Y_2 \ (X_2 \in U_1 ; Y_2 \in U_2)$

$\alpha A = \alpha (X_1 + Y_1) = (\alpha X_1) + (\alpha Y_1)$; $\alpha X_1 \in U_1$;

ஆகையால் $\alpha A \in U_1 + U_2$ $\alpha Y_1 \in U_2$

மேலும் $A + B = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2$

$= (X_1 + X_2) + (Y_2 + Y_2)$; $X_1 + X_2 \in U_1$

$Y_1 + Y_2 \in U_2$,

$\therefore A + B \in U_1 + U_2$

ஆகையால் $U_1 + U_2$ ஒரு வெக்டர் உள் வெளி.

(2) $C, D \in U_1 \cap U_2$ என்க.

ஆகையால் $C \in U_1$ மற்றும் $C \in U_2$

$D \in U_1$, மற்றும் $D \in U_1$

ஆகையால் $\alpha C \in U_1$ மற்றும் $\alpha C \in U_2$

மற்றும் $C + D \in U_1$, மற்றும் $C + D \in U_2$

ஆகையால் $U_1 \cap U_2$ ஒரு வெக்டர் உள் வெளி.

3) $d(U_1 \cap U_2) = r$ என்க

$d(U_1) = r + s$ என்க

$d(U_2) = r + t$ என்க.

$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_r)$, $U_1 \cap U_2$-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்க. $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_r, Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_s)$, U_1-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்க.

$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_r, Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_t$, U_2-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்க. $U_1 + U_2$-ன் எந்தப் பொருள் x-ம்,

$(X_1, \ldots\ldots X_r, Y_1, \ldots\ldots Y_s, Z_1, \ldots\ldots Z_t)$ ஆகியவைகளின் ஒரு படித்தான சேர்க்கை என்பதை உணரலாம். ஆகையால் இவைகள் $(U_1 + U_2)$-ன் பிறப்பாக்கிகள், இவைகள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள் என நிரூபிப்போம்.

$a_1 X_1 + \ldots + a_r X_r + b_1 Y_1 + \ldots + b_s Y_s + c_1 Z_1 + \ldots (c_t Z_t$
O = என்க. —(I)

ஆகையால் $Z = c_1 Z_1 + \dots + c_t Z_t = -(a_1 X_1 + \dots + a_r X_r + b_1 Y_1 + \dots b_s Y_s)$

Z-ன் முதல் கோவை, அது U_2 ஐச் சார்ந்தது என்றும், z-ன் இரண்டாவது கோவை, அது U_1 ஐச் சார்ந்தது என்றும் தெரிவிக்கின்றன.

ஆகையால் Z, $(U_1 \cap U_2)$ ஐச் சார்ந்தது.

ஆகையால் $Z = d_1 X_1 + d_2 X_2 + \dots\dots + d_r X_r = c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \dots\dots + c_t Z_t$

ஆதலால் $c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \dots\dots + c_t Z_t - d_1 X_1 - d_2 X_2 \dots\dots - d_r X_r = 0.$

ஆனால் $(X_1, X_2, \dots X_r, Z_1, \dots\dots Z_t)$ ஆகியவைகள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள். ஆகையால் $c_1 = c_2 = \dots = c_t = d_1 = \dots\dots = 0$ இவைகளை I-ல் பிரதியீடு செய்வோம்.

$$a_1 X_1 + \dots + a_r X_r + b_1 Y_1 + \dots\dots + b_s Y_s = 0$$

ஆனால் $(X_1, \dots\dots X_r, Y_1, \dots\dots Y_s)$ ஒ.ப.சா இல்லாதவை. ஆகையால் $a_1 = a_2 = \dots\dots a_r = b_1 = b_2 = \dots\dots b_s = 0$

ஆகையால் $(X_1, \dots\dots X_r, Y_1 \dots\dots Y_s, Z_1, \dots Z_t)$ எல்லாம் ஒ.ப.சா. இல்லாதவை. ஆகையால் இவைகள் $(U_1 + U_2)$-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம். ஆகையால் $d(U_1 + U_2) = r + s + t$

$$d(U_1 \cap U_2) = r$$

ஆகையால்
$$\begin{aligned} d(U_1 + U_2) + d(U_1 \cap U_2) &= r + s + t + r \\ &= (r + s) + (r + t) \\ &= d(U_1) + d(U_2) \end{aligned}$$

5.14. வெக்டர் வெளிகளின் ஒரே அமைப்புத் தன்மை (Isomorphism of Vector Spaces)

ஒரு களம் F-ன் மீதான V, V' என்ற இரண்டு வெக்டர் வெளிகள் கீழ்க்கண்ட மூன்று நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டால் 'ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை' (Isomorphic) என ஆகிறது; அதாவது $V \simeq V^1$

(1) V, V^1-ன் மேல் ஒன்றுக்கொன்றாக வரையப்பட்டிருக்க வேண்டும். அதாவது, அவை ஒன்றுக்கொன்றான பிரத்தியேக இணைப்பு (Bi-unique correspondence) கொண்டவைகளாக இருத்தல் வேண்டும்.

'α', $[X \leftrightarrow X' \quad (X \in V; X' \in V')]$ F ஐச் சார்ந்த ஒரு திசையிலியானல்,

(2) $(\alpha X)' = \alpha X'$ [(αX)-ன் பிம்பம் $= \alpha$ (X-ன் பிம்பம்) என இருத்தல் வேண்டும்.

(3) $(X + Y)' = X' + Y'$ [கூட்டலின் பிம்பம், பிம்பங்களின் கூட்டலாக இருத்தல் வேண்டும்.]

மாதிரி 3 : $(x_1, x_2) \leftrightarrow (x_2, -x_1)$ என்ற இணைப்பினுல், V_2 என்ற வெக்டர் வெளி தன் மேலேயே 'ஒரே அமைப்புக் கொண்டதாக' வரையப்பட்டுள்ளது எனக் காண்பிக்கவும்.

V_2, என்பது 2 உட்பொருள்கள் கொண்ட எல்லா வெக்டர்களின் கணம்.

(x_1, x_2) என்ற V_2-ஐச் சார்ந்த வெக்டரின் பிம்பம், $(x_2, -x_1)$. இதுவும் V_2-ஐச் சார்ந்தது. மேலும் இந்த பிம்பம் $(x_1, -x_2)$ என்ற வெக்டருக்குப் பிரத்தியேகமானது. ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட இணைப்பின்படி, V_2 தனக்கு மேலேயே ஒன்றுக்கொன்ருக வரையப்பட்டுள்ளது. மேலும்,

$$
\begin{aligned}
[\alpha(x_1, x_2)]' &= [\alpha x_1, \alpha x_2]' \\
&= [\alpha x_2, -\alpha x_1] \\
&= \alpha[x_2, -x_1] \\
&= \alpha[x_1, x_2]' \\
[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)]' &= [x_1 + y_1, x_2 + y_2]' \\
&= [x_2 + y_2, -x_1 - y_1] \\
&= (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \\
&= (x_1, x_2)' + (y_1, y_2)'
\end{aligned}
$$

ஆகையால், மேற்கண்ட இணைப்பினுல் V_2 தன் மேலேயே 'ஒரே அமைப்புக் கொண்டதாக வரையப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 5.15. V, V' என்ற இரண்டு வெக்டர் வெளிகள் ஒரே அமைப்புக் கொண்டவைகளானுல், (அதாவது $V \simeq V'$), V-ன் பூச்சியப் பொருளின் பிம்பம் V'-ன் பூச்சியப் பொருளாகும்.

$$X \in V; \qquad 0X = 0$$

$$
\begin{aligned}
(0X)\text{-ன் பிம்பம்} &= 0X' \\
&= 0 \\
&= V'\text{-ன் பூச்சியப் பொருள்}
\end{aligned}
$$

ஆதலால் 0-ன் பிம்பம் $0'$

தேற்றம் 5.16. ஒரே அமைப்புத் தன்மை (Isomorphism), பொருள் களின் ஒரு படித்தான சார்புடைமையையும், ஒரு படித்தான சார்பின்மையும், மாருமல் காக்கிறது. (Preserves linear dependence and linear independence)

$X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_k$; V என்ற வெக்டர் வெளியில் ஒ. ப. சா. கொண்டவைகளாக இருக்கட்டும், $V \cong V'$ என்க.

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_k X_k = 0$ என்னுமிடத்தில் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ எல்லாம் பூச்சியங்களாக இருத்தல் அவசியமில்லை இரண்டு பக்கங்களின் பிம்பங்களை எடுப்போம்.

$$\alpha_1 X_1' + \alpha_2 X' + \ldots + \alpha_k X_k' = 0'$$

இதிலும் $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ எல்லாம் பூச்சியங்கள் அல்ல.

ஆகையால் $X_1', X_2' \ldots X_k'$ ஒ. ப. சா. கொண்டவை.

$X_1, X_2, \ldots X_k$ ஒ. ப. சா. இல்லாமல் இருக்கட்டும். இவைகளின் பிம்பங்கள் ஒ. ப. சா. இல்லாமல் இருத்தல் வேண்டும். பிம்பங்கள் ஒ. ப. சா. கொண்டவைகளாக இருந்தால், $X_1, X_2, \ldots X_k$ ஆகியவை களும் ஒ. ப. சா. கொண்டவைகளாக இருத்தல் வேண்டும் என மேலே நிரூபித்துள்ளோம். ஆனல் இது கொள்கைக்கு மாறு பட்டது. ஆதலால், பிம்பங்களும் ஒ. ப. சா. இல்லாதவை எனக் கிடைக்கிறது.

கிளைத்தேற்றம்: இரண்டு வெக்டர் வெளிகள் ஒரே அமைப்புக் கொண்ட வைகளாக இருந்தால் அவைகளின் பரிமாணங்களும் ஒன்ருகத் தான் இருத்தல் வேண்டும்.

தேற்றம் 5.17. F என்ற களத்தின்மேல், 'r' பரிமாணமுள்ள V என்ற வெக்டர் வெளி 'r' வரிசை எண் உள்ள வெக்டர்களின் முழுக் கணத்துடன் (V_r) ஒரே அமைப்புக் கொண்டுள்ளது.

$B = \{E_1, E_2, \ldots\ldots E_r\}$ என்பது V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்க. V-ஐச் சார்ந்த எந்தப் பொருள் X-ஐயும், $E_1, E_2, \ldots\ldots E$ ஆகியவைகளின் ஒருபடித்தான சேர்க்கையாகப் பிரத்தியேகமான முறையில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$X = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_r E_r$, $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots\ldots \in F)$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_r)$ என்ற ஆய வெக்டர் $(\in V_r)$, Xக்குப் பிரத்தியேகமானது.

அதாவது $\alpha = R[X; B]$

இவ்விதம் X போன்ற பொருள்களுக்கும், α போன்ற வெக்டர் களுக்கும் ஒன்றுக்கொன்ருன இணைப்பு (Bi-unique correspondence) உள்ளது. $X \leftrightarrow \alpha$

$$kX = (k\alpha_1)E_1 + (k\alpha_2)E_2 \dots + (k\alpha_r)E_r$$

ஆகையால் kX-ன் ஆய வெக்டர்

$$= \{k\alpha_1, k\alpha_2 \dots k\alpha_{2r}\}$$
$$= k\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r\} = k\alpha.$$
$$= k\alpha$$

ஆகையால், $kX \leftrightarrow k\alpha$.

அல்லது, $(kX)' = k(X)'$

$Y = (\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \dots + \beta_r E_r)$ என்க.

ஆகையால் $Y \leftrightarrow \beta = (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_r)$

$$X + Y = (\alpha_1 + \beta_1)E_1 + (\alpha_2 + \beta_2)E_2 + \dots + (\alpha_r + \beta_r)E$$

ஆகையால் $X + Y \leftrightarrow [\alpha_1 + \beta_1, \dots \alpha_r + \beta_r]$

$$\leftrightarrow (\alpha_1, \dots \alpha_r) + (\beta_1 \dots \beta_r)$$
$$\leftrightarrow \alpha + \beta$$

ஆகையால் $(X + Y)' = X' + y'$

ஆகையால் $V \simeq V_r$.

5.15. இரண்டு மெய் எண் வெக்டர்களின் உட்பெருக்கு :

(Inner product of 2 real vectors)

$$X = (x_1, x_2, x_3 \dots\dots\dots x_n)$$

$Y = (y_1, y_2, y_3 \dots\dots\dots y_n)$ என்ற இரண்டு மெய் எண் வெக்டர்கள் எடுப்போம். அதாவது இவைகளின் உட்பொருள்களான $x_1, x_2 \dots y_1, y_2 \dots$ என்பன மெய் எண்கள். X, Y ஆகியவைகளின் உட்பெருக்கு கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது:

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

X என்ற வெக்டரின் பரிமாணம் (magnitude) அல்லது நீளம் (length) அல்லது தரம் (norm) கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது:

$$|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{(X, X)}$$

$|X| = 0$ என்ருல், $X = 0$ என ஆகிறது.

இரண்டு கலப்பெண் வெக்டர்களின் உட்பெருக்கு:
(Inner product of 2 complex vectors)

$$X = (x_1, x_2, \dots\dots x_n)$$

$Y = (y_1, y_2, \dots\dots y_n)$ என்ற இரண்டு கலப்பெண் வெக்டர்களை எடுப்போம். அதாவது இவைகளின் உட்பொருள்களான, $x_1, x_2 \dots$

y_1, y_2 என்பன கலப்பெண்கள். X, Y ஆகியவற்றின் உட்பெருக்கு கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது.

$$(X, Y) = (\overline{x_1}\, y_1 + \overline{x_2}\, y_2 + \dots\dots\dots + \overline{x_n}\, y_n)$$

[இதில் $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$ .... $\overline{x_n}$ ஆகியவைகள், x_1, x_2, ..., x_n ஆகியவைகளின் துணைக் கலப்பெண்கள் (conjugate complex numbers).]

X என்ற கலப்பெண் வெக்டரின் பரிமாணம், அல்லது நீளம் அல்லது தரம் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது:

$$|X| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots\dots + |x_n|^2}$$
$$= \sqrt{(\overline{x_1}\, x_1) + (\overline{x_2}\, x_2) + \dots + (\overline{x_n}\, x_n)}$$
$$= \sqrt{(X, X)}$$

[z ஒரு கலப்பெண், $\overline{z}$ அதன் துணைக் கலப்பெண் ஆனுல், $z\,\overline{z} = |z|^2$ என்பது கலப்பெண்களின் தன்மை]. $|X|$ பூச்சியமானுல் $X = 0$ என இருத்தல் வேண்டும்.

தேற்றம் 5.18.

X, Y ஆகியவைகள் கலப்பெண் வெக்டர்களானுல் கீழ்க் கண்டவைகளை நிரூபிக்கவும்:

1) $\overline{(X, Y)} = (Y, X)$
2) $\alpha (X, Y) = (\overline{\alpha} X, Y) = (X, \alpha Y)$
3) $(X + Y, Z) = (X, Z) + (Y, Z)$
4) $(X, Y + Z) = (X, Y) + (X, Z)$

1) $(X, Y) = x_1\, \overline{y_1} + x_2\, \overline{y_2} + \dots\dots + x_n\, \overline{y_n}$

$$\overline{(X, Y)} = x_1\, \overline{y_1} + x_2\, \overline{y_2} + \dots\dots + x_n\, \overline{y_n}$$
$$= \overline{y_1}\, x_1 + \overline{y_2}\, x_2 + \dots\dots + \overline{y_n}\, x_n$$
$$= (Y, X)$$

2) $\alpha (X, Y) = \alpha\, \overline{x_1}\, y_1 + \alpha\, \overline{x_2}\, y_2 + \dots\dots + \alpha\, \overline{x_n}\, y_n$

$$= \overline{\overline{\alpha}\, x_1}\, y_1 + \overline{\overline{\alpha}\, x_2}\, y_2 + \dots$$
$$= (\overline{\alpha} X, Y)$$

மேலும் $\alpha (X, Y) = \overline{x_1}\, \alpha\, y_1 + \overline{x_2}\, \alpha\, y_2 + \dots\dots + \overline{x_n}\, \alpha\, y_n$
$$= (X, \alpha Y)$$

(3) $\left(X+Y, Z\right) = \left(\overline{x_1}+\overline{y_1}\right)z_1 + \left(\overline{x_2}+y_2\right)z_2 + \ldots\ldots + \left(\overline{x_n}+\overline{y_n}\right)z_n$

$$= \left[\overline{x_1}\, z_1 + \overline{x_2}\, z_2 + \ldots + \overline{x_n}\, z_n\right]$$

$$+ \left[\overline{y_1}\, z_1 + \overline{y_2}\, z_2 + \ldots + y_n\, z_n\right]$$

$$= (X, Y) + (Y, Z)$$

(4) $\left(X, Y+Z\right) \left[\overline{x_1}\left(y_1+z_1\right) + x_2\left(y_2+z_2\right) + \ldots + \overline{x_n}\left(y_n+z_n\right)\right]$

$$= \left[x_1\, y_1 + \overline{x_2}\, y_2 + \ldots + \overline{x_n}\, y_n\right]$$

$$+ \left[\overline{x_1}\, z_1 + \overline{x_2}\, z_2 + \ldots + x_n\, z_n\right]$$

$$= (X, Y) + (X, Z)$$

5.16. வரையறை

$|X-Y|$ என்பது X, Y ஆகியவைகளின் பிரிவு (Separation) எனப்படும்.

மாதிரி:

$|X-Y| = |Y-X|$ எனக் காண்பிக்கவும்.

$$X-Y = (x_1-y_1,\ x_2-y_2, \ldots\ldots, x_n-y_n)$$

$$|X-Y| = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2| + \ldots}$$

$$= \sqrt{|y_1-x_1|^2 + |v_2-x_2|^2 + \ldots\ldots}$$

$$= |(y_1-x_1,\ y_2-x_2, \ldots\ y_n-x_n)|$$

$$= |Y-X|$$

தேற்றம் 5.19.

ஸ்க்வார்ஸ் சமனின்மை (Schwarz Inequality)

X, Y கலப்பெண் வெக்டர்களானல்

$|(X, Y)| \leq |X|\,|Y|$ என நிறுவுக.

நிறுவல்:

$X = (x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$

$Y = (y_1, y_2, \ldots \ldots, y_n)$ என்க.

$$O \leq \sum_{r,\, s=1}^{n} \left| x_r y_s - x_s y_r \right|^2$$

$$= \sum_{r,s=1}^{n} \left(x_r y_s - x_s y_r \right) \left(\overline{x_r}\, \overline{y_s} - \overline{x_s}\, \overline{y_r} \right)$$

$$= \sum_{r,s=1}^{n} \left(\overline{x_r}\, x_r\, \overline{y_s}\, y_s + x_s\, \overline{x_s}\, y_r\, \overline{y_r} - \overline{x_r}\, y_r\, x_s\, \overline{y_s} - \overline{x_s}\, y_s\, x_r\, \overline{y_r} \right)$$

$$= 2 \left\{ \sum_{r=1}^{n} \overline{x_r}\, x_r \right\} \left\{ \sum_{r=1}^{n} \overline{y_r}\, y_r \right\}$$

$$- 2 \left\{ \sum_{r=1}^{n} \overline{x_r}\, y_r \right\} \left\{ \sum_{r=1}^{n} \overline{x_r\, y_r} \right\}$$

$$= 2 \left\{ \sum_{r=1}^{n} |x_r|^2 \right\} \left\{ \sum_{r=1}^{n} |y_r|^2 \right\} - 2 \left| \sum_{r=1}^{n} \overline{x_r}\, y_r \right|$$

அல்லது $2 \left| \sum_{r=1}^{n} \overline{x_r}\, y_r \right|^2 \leq 2 \left\{ \sum_{r=1}^{n} |x_r|^2 \right\} \left\{ \sum_{r=1}^{n} |y_r|^2 \right\}$

அல்லது $|(X, Y)|^2 \leq |X|^2\, |Y|^2$

அல்லது $|(X, Y)| \leq |X|\, |Y|$

தேற்றம் 5.20. (முக்கோணச் சமனின்மை) (Triangle Inequality)

$|X + Y| \leq |X| + |Y|$ என நிறுவுக.

நிறுவல் :

$$|X+Y|^2=(X+Y, X+Y)=(X, X)+(Y, Y)+(X, Y)+(Y, X)$$

$$= |X|^2+|Y|^2+(X, Y)+(\overline{X, Y}) \text{ ...தேற்றம் 17 (i)}$$

$$\leq |X|^2+|Y|^2+2|(X, Y)|$$

$$\leq |X|^2+|Y|^2+2|X|\,|Y| \text{ ...தேற்றம் 18}$$

$$\leq (|X|+|Y|)^2$$

அல்லது $|X+Y| \leq |X|+|Y|$

கிளைத்தேற்றம் :

தேற்றம் 19-ன் முடிவில்,

X க்குப் பதிலாக $X-Z$ என்றும்,

Y க்குப் பதிலாக $Z-Y$ என்றும் எழுதுவோம்.

$$|X-Z+Z-Y| \leq |X-Z|+|Z-Y|$$

அல்லது $|X-Y| \leq |X-Z|+|Y-Z|$ என ஆகிறது.

5.17. வரையறை :

ஒரு வெக்டர் X-ன் பரிமாணம் அல்லது தரம் $|X|=1$ ஆனால் X ஓர் அலகு வெக்டர் (unit vector) எனப்படுகிறது. பூச்சியமல்லாத எந்த வெக்டர் X-ஐயும் அதனுடைய தரம் $|X|$ ஆல் வகுத்தால், X-ன் அலகு வெக்டர் கிடைக்கிறது.

$$X\text{-ன் அலகு வெக்டர்} = \frac{1}{|X|}X = |X|^{-1}X.$$

ஒரு வெக்டர் X ஐ அதன் அலகு வெக்டராக மாற்றுவதற்கு, X ஐத் '**தரப்படுத்துதல்**' (Normalisation of X) என்பது பெயர்.

X, Y என்ற இரண்டு வெக்டர்களின் உட்பெருக்கு $(X, Y)=0$ ஆனால், X, Y-களுக்குச் '**செங்குத்து வெக்டர்கள்**' (Orthogonal vectors) என்பது பெயர்.

$\{X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n\}$ என்ற வெக்டர்களின் கணத்தில், எந்த இரண்டு வெக்டர்களும் செங்குத்து வெக்டர்களாக இருந்தால், கணம் **செங்குத்துக் கணம்** (Orthogonal set) எனப்படுகிறது.

$\{X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n\}$ என்ற வெக்டர்களின் கணத்தில் எல்லா வெக்டர்களும் அலகு வெக்டர்களாகவும் எந்த இரண்டு வெக்டர்களும் செங்குத்து வெக்டர்களாகவும் இருந்தால், கணம், '**தரச் செங்குத்துக் கணம்**' (Orthonormal set) எனப்படுகிறது.

ஒரு வெக்டர் வெளியின் ஆதாரக் கணம் (Basis) ஒரு 'தரச்செங் குத்துக் கணமானால், 5.16 (4) இந்த ஆதாரக் கணத்துக்குத் ' தரச் செங்குத்து ஆதாரக் கணம் ' (Orthonormal Basis) என்பது பெயர்.

மாதிரி 4: V என்ற வெக்டர் வெளியின் ஓர் ஆதாரக் கணத் திலுள்ள எந்த வெக்டருக்கும் X என்ற ஒரு வெக்டர் செங்குத்தாக இருந்தால், V-ன் எந்த வெக்டருக்கும், X செங்குத்தாக இருக்கும்.

ஆதாரக் கணம் ($X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$) என்க.
கொள்கையின்படி, $(X, X_1) = (X, X_2) = \ldots\ldots = (X, X_n) = 0$
$Y \in V$ என்க.

மேலும் $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots\ldots + \alpha_n X_n$
$$(X, Y) = \alpha_1 (X, X_1) + \alpha_2 (X, X_2) + \ldots\ldots + \alpha_n (X, X_n) = 0$$
ஆகையால் X, Y-க்குச் செங்குத்து வெக்டர்.

மாதிரி 5: ஒரே அமைப்புக் கொண்ட இரண்டு வெக்டர் வெளிகளில் 'இரண்டு வெக்டர்களின் செங்குத்துத் தன்மை' காக்கப்படுவதில்லை '. (Orthogonality of 2 vectors is not necessarily preserved in Isomorphism).

இதை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் சரி பார்ப்போம். V என்பது 3 உட்பொருள் கொண்ட வெக்டர்களின் வெளி என்போம். இதிலுள்ள வெக்டர்களை

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$ என்ற அணியால் ஒருபடி மாற்றம்

(linear transformation) செய்வோம். புதிய வெக்டர்களின் வெளி V' என்போம். $V \simeq V'$ எனக் கிடைக்கும். V-ல், $X = (1, 0, 0)$, $Y = (0, 1, 0)$ என்ற இரு வெக்டர்களைக் கருதுவோம். இவை களின் உட்பெருக்கு பூச்சியமாகையால், இவைகள் செங்குத்து வெக்டர்கள்.

X-ன் பிம்பம் $X' = AX = (1, 2, 3)$ எனவும், Y-ன் பிம்பம் $Y' = AY = (2, 3, 0)$ எனவும் கிடைக்கின்றன. ஆனால் X', Y' ஆகியவை செங்குத்து வெக்டர்கள் அல்ல எனப் பார்க்கிறோம். ஆதலால் ஒரே அமைப்புத் தன்மையினால் செங்குத்துத் தன்மை காக்கப்படுவதில்லை.

தேற்றம் 5.21.

பூச்சிய வெக்டர்களல்லாத சில வெக்டர்கள் 'ஒரு செங்குத்துக் கணமாக' (ortnogonal set) இருந்தால் அவைகள் ஒருபடித்தான சார்பு இல்லாதவைகளாக இருத்தல் வேண்டும்.

$X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_m$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு செங்குத்துக் கணம் என்போம். ஆதலால்,

$$(X_r, X_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots\ldots m ; r \neq s)$$

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_r X_r + \ldots + \alpha_m X_m = 0$ என்க.

X_r-ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் உட்பெருக்கல் செய்வோம்.

$$\alpha_1 (X_r, X_1) + \alpha_2 (X_r, X_2) + \ldots\ldots + \alpha_r (X_r, X_r) + \ldots\ldots + \alpha_m (X_r X_m) = 0$$

ஆதலால், $\alpha_r (X_r, X_r) = 0$

அல்லது $\alpha_r \mid X_r \mid^2 = 0$

இதில் $\mid X_r \mid \neq 0$ கொள்கை.

ஆதலால் $\alpha_r = 0$. இதேபோல,

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots\ldots = \alpha_m = 0$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

ஆதலால் $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_m$, ஒ. ப. சா. இல்லாதவை.

மாதிரி 6: $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ என்பவை முழு வெக்டர் வெளி V_n-ன் ஒரு தரச்செங்குத்துக் கணமானால், V_n-ன் எந்த வெக்டர் Vஐயும்,

$$V = (U_1, V) U_1 + (U_2, V) U_2 + \cdots + (U_n, V) U_n$$

என எழுதலாம் என்பதைச் சரி பார்க்கவும்.

$(U_1, U_2, \ldots\ldots U_n)$ ஒருதரச் செங்குத்துக் கணமானதால், இவை ஒ. ப. சா. இல்லாதவை. $d(V_n) = n$ என்பதாலும், இக் கணத்தில் 'n' ஒ. ப. சா. இல்லாத வெக்டர்கள் இருப்பதாலும், இது V_n-ன் ஒரு 'தரச்செங்குத்து ஆதாரக் கணம்' ஆகிறது. இது ஓர் ஆதாரக் கணமானதால் V_n-ன் எந்த வெக்டர் V ஐயும் $U_1, U_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, U_n$ ஆகியவைகளின் பிரத்தியேகமான ஓர் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக எழுதலாம்.

இந்த ஒருபடிச் சேர்க்கை

(I) $V = (U_1, V) U_1 + (U_2, V) U_2 + \ldots\ldots + (U_n, V) U_n$

என்போம். இதில் (U_1, V), $(U_2, V) \ldots$ என்பவை திசையிலிகள்.

இதன் இரண்டு பக்கங்களையும் U_1 ஆல் உட்பெருக்கல் செய் வோம்.

$$(U_1 V) = (U_1, V)(U_1, U_1) + (U_2, V)(U_1, U_2) + \ldots$$
$$= (U_1, V) \mid U_1 \mid^2 \qquad [U_r, U_s = 0, r \neq s]$$
$$= (U_1, V) \ldots\ldots\ldots \qquad \mid U_1 \mid = 1$$

இதே போல,

$(U_2, V) = (U_2, V)$ போன்றவைகள் கிடைப்பதால், முடிவு (1) சரியானது.

தேற்றம் 5·22.

வெற்று அல்லாத (Non-empty) எந்த வெக்டர் வெளி V-க்கும் ஒரு தரச்செங்குத்து ஆதாரக் கணம் (Orthonormal basis) உண்டு. மேலும், எந்த ஒரு தரச்செங்குத்துக் கணமும் (Orthonormal set) ஒரு 'தரச்செங்குத்து ஆதாரக் கணத்தின்' பகுதியாகும்.

நிறுவல்:

இரண்டாவது உண்மையை நிறுவினல் முதல் உண்மை நிறுவப்பட்டதாகும். $d(V) = n$ என்க. $X_1, X_2, \ldots\ldots X_r$ $(r < n)$ என்ற வெக்டர்கள், ஒரு 'தரச்செங்குத்துக் கணம்' (orthonormal set) என்க. இவைகள் தேற்றம் 20-ன்படி, ஒ.ப.சா. இல்லாதவைகள். இவைகளுடன் ஒ.ப.சா. இல்லாத V-ஐச் சார்ந்த X என்ற மற்ரொரு வெக்டரைக் கண்டுபிடிக்கலாம் (தேற்றம் 5.10). கீழ்க்கண்டுள்ளபடி Y என்ற ஒரு வெக்டரை எடுப்போம்.

$$Y = X - (X_1, X)X_1 - (X_2, X)X_2 - \ldots (X_r, X)X_r.$$

Y என்பது $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_r$ ஆகியவைகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் செங்குத்தானது. உதாரணமாக, Y, X_1 க்குச் செங்குத்து எனக் காண்பிப்போம்.

$$\begin{aligned}(X_1, Y) &= (X_1, X) - (X_1, X)\ (X_1, X_1) \\ &\qquad - (X_2, X)\ (X_1, X_2) \ldots\ldots \\ &= (X_1, X) - (X_1, X)\ |X_1|^2 \\ &\qquad - (X_2, X)\ (0) - \ldots\ldots \\ &= (X_1, X) - (X_1, X) = 0\end{aligned}$$

Y-ஐ Y_1 என்று தரப்படுத்துவோம்.

இவ்விதமாக, $X_1, X_2, \ldots, X_r$ என்ற ஒரு தரச்செங்குத்துக் கணத்தில் Y_1 என்ற புதிய வெக்டரைச் சேர்த்து [$(r+1)$ எண்ணிக்கையுள்ள ($X_1, X_2, \ldots\ldots, X_r, Y_1$) என்ற தரச்செங்குத்துக் கணமாக்கி] விட்டோம். இதே போல $(n-r)$ புதிய வெக்டர்களை இக்கணத்தில் சேர்க்கலாம். இப்பொழுது ($X_1, X_2, \ldots\ldots X_r, Y_1, \ldots\ldots Y_{n-r}$) ஒரு ' தரச்செங்குத்துக் கண'மாகிறது. இவைகள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள் (தேற்றம் 5.21). இதில் n வெக்டர்கள் இருப்பதாலும், $d(V) = n$ என்பதாலும், இவைகள் ஒரு ' தரச்செங்குத்து ஆதாரக் கணமாகின்றன.

இவ்விதமாக, கொடுக்கப்பட்ட சில தரச் செங்குத்து வெக்டர்களிலிருந்து ஆரம்பித்து ஓர் ஆதாரக் கணத்தை உருவாக்குகிறோம். ஆகையால் V-க்கு ஒரு தரச் செங்குத்து ஆதாரக் கணம் உண்டென்றும், கொடுக்கப்பட்ட கணம் இந்த ஆதாரக் கணத்தின் ஒரு பகுதியென்றும் ஆகிறது.

உதாரணம்: V_2-ல் $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ என்ற இரு வெக்டர்கள், தரச் செங்குத்து வெக்டர்கள். ஏனெனின் $|e_1| = \sqrt{1^2} = 1 = |e_2|$; $(e_1, e_2)(0, 0) = 0$. மேலும் இவைகள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள். ஆகையால், இவைகள் V_2-ன் ஒரு தரச் செங்குத்து ஆதாரக் கணமாகின்றன.

$$X \in V_2; \quad X = (x_1\ x_2)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2$$

இதேபோல, V_3-ல் $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$
$e_3 = (0, 0, 1)$ $\quad |e_r| = 1$; $\quad (e_r, e_s) = 0$

ஆகையால் இவைகள் தரச் செங்குத்துக் கணமாகின்றன. மேலும் இவைகள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள். ஆகையால் இவைகள் V_3-ன் ஒரு தரச் செங்குத்து ஆதாரக் கணமாகின்றன.

$$X \in V_3; \quad X = (x_1\ x_2\ x_3)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 x_3.$$

5.18. Schmidt-ன் செங்குத்து வெக்டர் கணம் உருவாக்கும் முறை

V_n என்ற வெக்டர் வெளியில், $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots, X_n$ என்ற எவையேனும் 'n' ஒ.ப.சா. இல்லாத வெக்டர்கள் கொடுக்கப்பட்டால், இவைகளிலிருந்து $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ என்ற செங்குத்துக் கணத்தை (Orthogonal set) உருவாக்கலாம்.

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஒ. ப. சா. இல்லாத வெக்டர்கள். ஆகையால் இவைகளில் ஒன்றும் பூச்சிய வெக்டராக இருக்கமுடியாது. கீழ்க் கண்டவாறு கோவைகள் கொண்ட $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ போன்ற 'n' வெக்டர்களை உருவாக்குவோம்:

$$Y_1 = X_1$$
$$Y_2 = X_2 - \frac{(Y_1, X_2)}{(Y_1, Y_1)} \cdot Y_1$$
$$Y_3 = X_3 - \frac{(Y_1, X_3)}{(Y_1, Y_1)} \cdot Y_1 - \frac{(Y_2, X_3)}{(Y_2, Y_2)} \cdot Y_2$$

$$Y_n = X_n - \frac{(Y_1, X_n)}{(Y_1\ Y_1)} Y_1 - \frac{(Y_2\ X_n)}{(Y_2, Y_2)} Y_2 \ldots \ldots\ldots \ldots \frac{(Y_{n-1}, X_n)}{(Y_{n-1}, Y_{n-1})} Y_{n-1}$$

இப்பொழுது $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ ஒரு செங்குத்துக் கணமாகிறது. ஏனெனில்,

$$(Y_1, Y_2) = (Y_1\ X_2) - \frac{(Y_1\ X_2)}{(Y_1\ Y_1)}(Y_1\ Y_1)$$
$$= (Y_1\ X_2) - (Y_1\ X_2) = 0$$
$$(Y_2, Y_3) = (Y_2\ X_3) - \frac{(Y_1\ X_3)}{(Y_1\ Y_1)}(Y_2, Y_1) - \frac{(Y_2, X_3)}{(Y_2\ Y_2)}(Y_2\ Y_2)$$
$$= (Y_2\ X_3) - \frac{(Y_1\ X_3)}{(Y_1\ Y_1)} . 0 - (Y_2, X_3)$$
$$= 0$$

இதேபோல $(Y_r\ Y_s) = 0\ (r, s = 1, 2 \ldots\ldots n;\ r \neq s)$

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n$—இவைகளில் ஒன்றும் பூச்சிய வெக்டராகாது.

இம்முறைக்கு 'ஸ்மிட்டின் செங்குத்து வெக்டர் கணம் உருவாக்குதல்' (Schmidt's orthogonalisation process) என்பது பெயர்.

5.19. செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பி (Orthogonal Complement)

U என்பது வெக்டர்வெளி V_n-ன் ஒரு வெக்டர் உள் வெளியானால், U-ன் எந்த வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக இருக்கும் வெக்டர்கள் அடங்கிய U' என்ற கணத்துக்கு U-ன் செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பி (Orthogonal complement of U) என்பது பெயர்.

தேற்றம் 5.23.

U' என்பது U-ன் செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பியானால், கீழ்க்கண்டவைகளை நிறுவுக :

(1) U' ஒரு வெக்டர் உள்வெளி.

(2) U, U'-ன் செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பி.

(3) $d(U) + d(U') = n$.

(1) $X \in U;\ X'\ Y' \in U'$ என்க.

ஆகையால், $(X', X) = 0;\ \ (Y', X) = 0$

$$(X, \alpha X') = \alpha (X, X') = \alpha 0 = 0.$$

ஆகையால், $\alpha X' \in U'$

$$(X' + Y', X) = (X', X) + (Y', X) = 0 + 0 = 0.$$

ஆகையால் $X' + Y' \in U'$

ஆகையால் U', ஒரு வெக்டர் உள்வெளி.

$d(U) = r$ என்க.

$(X_1, X_2, \ldots, X_r)$, U-ன் ஒரு தரச்செங்குத்து ஆதாரக் கணம் என்க. இவைகள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவை. தேற்றம் 5.22-ன்படி இந்தக் கணத்துடன், $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots \ldots, X_n$ என்ற தரச்செங்குத்து வெக்டர்களைக் கண்டுபிடித்துச் சேர்த்து $(X_1, X_2, \ldots, X_r, \ldots, X_n)$ என்ற V_n-ன் ஒரு தரச்செங்குத்து ஆதாரக் கணத்தை உருவாக்கலாம். V_n ஐச் சார்ந்த எந்த X ஐயும்

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_r X_r + \alpha_{r+1} X_{r+1} + \ldots + \alpha_n X_n \quad \text{— (I)}$$

என எழுதலாம். $X \in U'$ என்று இருக்கவேண்டுமானல் U-ன் எந்த வெக்டருக்கும் X செங்குத்தாக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது X என்ற வெக்டர், $X_1, X_2, \ldots X_r$ ஆகியவைகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் செங்குத்தாக இருத்தல் வேண்டும். ஆதலால் $(X, X_1) = (X, X_2) = \ldots \ldots = (X, X_r) = 0$. ஆகையால் (I)-ன்படி

$$(X, X_1) = \alpha_1 (X_1, X_1) + \alpha_2 (X_2, X_1) + \ldots + \alpha_r (X_r, X_1) + d_{r+1} (X_{r+1}, X_1) + \ldots + \alpha_n (X_n, X_1) = 0$$

ஆதலால் $\alpha_1 (X_1, X_1) = 0$

அல்லது $\alpha_1 |X_1|^2 = 0$

அல்லது $\alpha_1 = 0$, $\qquad |X_1| = 1$

இதேபோல $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_r = 0$ என ஆகிறது.

ஆகையால் $X = \alpha_{r+1} X_{r+1} + \alpha_{r+2} X_{r+2} + \ldots + \alpha_n X_n$ என ஆகிறது.

ஆகையால் U' என்ற செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பி $X_{r+1}, \ldots, X_n$ ஆகியவைகளால் பிறப்பிக்கப்படுகிறது.

$(X_{r+1}, \ldots, X_n)$, U'-ன் ஒரு தரச்செங்குத்து ஆதாரக் கணமாகிறது. ஆகையால் $d(U') = n - r$.

ஆதலால் $d(U) + d(U') = r + n - r = n$. மேலும் சமச்சீர் கொள்கையின்படி, U' என்ற வெக்டர் உள்வெளியின் செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பி, $X_1, X_2, \ldots, X_r$, என்பவைகளால் பிறப்பிக்கப்படுகிறது. அதாவது U என்ற உள்வெளிதான் எனப் புலனாகிறது.

தேற்றம் 5.24.

U-ன் செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பி U', U-ன் சாதாரண நிரப்பியுமாகிறது.

$X \in U$ மற்றும் $X \in U'$ என்க.

ஆகையால் $(X, X) = 0$

ஆதலால் $|X|^2 = 0$

ஆதலால் $|X| = 0$

ஆதலால் $X = 0$

ஆகையால் U, U' இவைகளுக்கு 0 ஒன்றுதான் பொது வெக்டர். மேலும் தேற்றம் 23-ன்படி $d(U) + d(U') = n$. ஆகையால் தேற்றம் 12-ன்படி, U', U-ன் ஒரு சாதாரண நிரப்பியுமாகிறது.

கிளைத் தேற்றம் :

U என்பது V_n-ன் ஓர் உள்வெளி. V_n-ன் எந்த வெக்டர் X ஐயும், $X = Y + Z$ என்ற பிரத்தியேகமான முறையில் எழுதலாம்.

இதில் $Y \in U$; $(Y, Z) = 0$ என இருக்கும்.

நிறுவல்: U என்ற உள்வெளிக்குத் தகுந்த U' என்ற செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பி உண்டு. U'-ல் உள்ள எந்த வெக்டரும் U விலுள்ள எந்த வெக்டருக்கும் செங்குத்து. U', U-ன் ஒரு சாதாரண நிரப்பியுமாதலால் V_n-ன் X என்ற ஒரு வெக்டரை,

$X = Y + Z$, $Y \in U$ என்றும் $Z \in U'$ என்றும் எழுதலாம்.

$Y \in U$; $Z \in U'$; U', U-ன் செங்குத்து நிரப்பி என்பவைகளால் $(Y, Z) = 0$ என ஆகிறது. ஆகையால்

$X = Y + Z$; $Y \in U$; $(Y, Z) = 0$ என ஆகிறது.

பயிற்சி

1) a, b, c மெய் எண்களானால் $a + b\sqrt{2} + c\sqrt[3]{8}$ என்ற கோவையால் கொடுக்கப்படும் எண்கள் மெய் எண் களத்தின் மேல் ஒரு வெக்டர் வெளியை உருவாக்குகின்றன என நிறுவுக.

2) V என்ற வெக்டர் வெளி F என்ற களத்தின் மேல் உள்ளது. கீழ்க்கண்டவைகளை நிறுவுக.

(1) $a, b \in F$; $X \neq 0$, மற்றும் $X \in V$, $aX = bX$ ஆனால் $a = b$

(2) $X, Y \in V,\ a \neq o,\ a \in F;\ aX = aY$
ஆனால் $X = Y$.

3) $ax + bv = o,\ cx + dy = o$ - இந்த இணைப்புகளைச் சரி செய்யும் x, y என்ற எண்களடங்கிய (x, y) போன்ற வெக்டர்கள். ஒரு வெக்டர் வெளி என்று காண்பிக்கவும். மேலும், இந்த வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் என்னவென்றும் பார்க்கவும்.

4) பூச்சிய வெக்டரைத் தம்மிடத்தே கொண்ட எந்த வெக்டர்களின் கணமும் ஒருபடித்தான சார்பு உடையவைகளாகத்தான் இருக்கும் என நிறுவுக.

5) கீழ்க்கண்ட வெக்டர்கள் ஒ.ப.சா. கொண்டவைகளா, இல்லையா எனப் பார்க்கவும் :

(1) $(-1, 2, 1), (3, 1, -2)$

(2) $(2, -1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 2)$

(3) $(1, 0, -1), (2, 1, 3,), (-1, 0, 0,), (1, 0, 1)$

(4) $(1, 2, 1, 2), (0, 1, 1, 0), (1, 4, 3, 2)$

(5) $(1, 2, -1, 1), (0, 1, -1, 2), (2, 1, 0, 3),$
$(1, 1, 0, 0)$

6) $X_1, X_2 \in V;\ a, b \in F;\ \{X_1, X_2, aX_1, + bX_2\}$ என்ற கணம் ஒ. ப. சா. கொண்டது எனக் காண்பிக்கவும்.

7) $(2, -3, 1), (0, 1, 2), (1, 1, -2)$ என்ற வெக்டர்கள் V_3-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் எனக் காண்பிக்கவும். $(\alpha, \beta, \gamma$ என்ற வெக்டரை மேற்கண்ட ஆதாரக் கணத்தின் சார்பாகக் கூறும் ஆய வெக்டர் (Co-ordinate vector) என்ன என்று பார்க்கவும்.

8) $(2, -1, 0, 1), (6, 1, 4, 5), (4, 1, 3, -4)$ என்ற வெக்டர்கள் V_4-ன் U என்ற ஓர் உள்வெளியைப் பிறப்பிக்கின்றன. U-ன் ஒரு 'தரச்செங்குத்து ஆதாரக் கணத்தை' (Orthonormal basis)க் கண்டுபிடிக்கவும்.

9) 2 அல்லது அதற்குக் குறைந்த படியுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைகள் 3 பரிமாணமுள்ள ஒரு வெக்டர் வெளி உருவாக்குகின்றன எனக் காண்பிக்கவும். இந்த வெக்டர் வெளிக்கு, $(t^2+t, t^2-t, t+1)$ ஓர் ஆதாரக் கணமென்று காண்பிக்கவும். $2t^2 - 7t + 3$

என்ற பல்லுறுப்பை இந்த ஆதாரக் கணத்தின் சார்பாகக் குறிக்கும் ஆய வெக்டர் யாது?

10) ஒரே வரிசை எண் உடைய இரண்டு கலப்பெண் வெக்டர்கள் X, Y ஆனால், $|X+Y|^2+|X-Y|^2=2|X|^2+2|Y|^2$ என நிறுவுக.

11) V_3-ன் U என்ற உள்வெளி, $3x_1+x_2-x_3=0$ $x_1-5x_2+x_3=0$ என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளைச் சரி செய்யும். x_1, x_2, x_3 ஆகிய எண்களடங்கிய (x_1, x_2, x_3) என்ற வெக்டர்களால் ஆனது. U-ன் 'செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பி'யின் (Orthogonal complement of U) ஓர் ஆதாரக்கணத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

12) V_4-ன் U என்ற ஓர் உள்வெளி, $(1, 0, -1, 2)$ $(-1, 1, 1, 0)$ என்ற வெக்டர்களினுல் பிறபிக்கப்படுகிறது. U-ன் 'செங்குத்து வெக்டர் நிரப்பி', $(\alpha-2\beta, -2\beta, \alpha, \beta)$ என்ற உருவமுள்ள வெக்டர்களாலானது என்று காண்பிக்கவும். U'-ன் 'தரச் செங்குத்து ஆதாரக் கணத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

13) $X_1, X_2, \ldots\ldots X_m$; $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ ஆகியவைகள் ஒரு வெக்டர் வெளியின் பொருள்கள். $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ஆகியவைகளில் ஒ. ப. சா. இல்லாத பொருள்கள் மீப்பெரு எண்ணிக்கை 'r' என்றும், $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ என்ற பொருள்களில் ஒ.ப.சா. இல்லாத பொருள்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை 's' என்றும் இருந்தால், $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியவைகளில் ஒ.ப.சா. இல்லாத பொருள்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை '$r+s$'-ஐ விட அதிகமாக இருக்க முடியாது என நிறுவுக.

14) $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ - இவைகள் ஒரு வெக்டர் வெளியைச் சார்ந்தவை. ஒவ்வொரு Y-ம், எல்லா X-ன் ஒருபடித்தான சேர்க்கையாகும். X-ல் ஒ.ப.சா. இல்லாத பொருள்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை 'r' என்றும், Y-ல் ஒ.ப.சா. இல்லாத பொருள்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை 's' என்றும் இருந்தால், $s \leq r$ என நிறுவுக.

6. அணிகள்

(Matrices)

6.1. ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் ஆராய்ச்சியில் 'அணி' (Matrix) என்ற கருத்து, சென்ற நூற்றுண்டில் Cayley என்பவரால் முதன் முறையாக உருவாக்கப்பட்டது. உதாரணமாகக் கீழ்க்கண்ட சமன் பாடுகளைக் கருதுவோம் :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots\cdots + a_{1n} x_n = y_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots\cdots + a_{2n} x_n = y_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m_1} x_1 + a_{m_2} x_2 + \cdots\cdots + a_{mn} x_n = y_m.$$

இவைகளில், $a_{11}, a_{12} \ldots \ldots$ போன்ற, வரிசைப் படுத்தப்பெற்ற குணங்கள்தாம் முக்கியமானவை. குணகங்களை மாத்திரம் அதே வரிசைகளில் பிரித்து எழுதினுல் அணி என்ற கருத்து உருவாகிறது.

6.2. (1) அணியின் வரையறை (Definition of a Matrix)

களம் F-ஐச் சார்ந்த mn பொருள்களை, m நிரைகள் (rows), n நிரல்கள் (columns) கொண்ட ஒரு செவ்வக உருவத்தில் கீழ்க் கண்ட விதத்தில் அணிவகுத்தால், இந்த அணிவகுப்புக்குக் களம் F-ன் மீதான ஒரு $m \times n$ அணி (Matrix) என்பது பெயர்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

இதில் $a_{11}, a_{12} \ldots\ldots$ என்ற எண்களுக்கு அணி A-ன் மூலப் பொருள்கள் (elements) என்பது பெயர். இவைகளின் பொதுவான மூலப்பொருளை a_{ij} எனக் குறிக்கிறேம். இதில் முன்குறியான 'i'

என்பது, இந்தப் பொருள் 'i' என்ற நிரையிலும் 'j' என்ற பின்குறி, இந்தப்பொருள் 'j' என்ற நிரலிலும் உள்ளது என்பதைக் குறிக்கின்றது. அதாவது a_{ij} என்ற பொருள் i வரிசை எண்ணுடைய நிரையும், j வரிசை எண்ணுடைய நிரலும் சந்திக்கும் இடத்தில் உள்ளது எனப் பொருள்படும். சுருக்கமாக அணி A-ஐ $A = (a_{ij})$ எனவும் குறிப்பதுண்டு.

6.2. (2) மேலும், A-ன் பொதுப்பொருளை, $(A)_{ij} = a_{ij}$ என்றும் எழுதுவதுண்டு. F என்ற களம், மெய்யெண்களின் களமானல், A, ஒரு மெய்யெண் அணி (Real Matrix) என்றும், F, ஒரு கலப்பெண்களின் களமானல், A, ஒரு கலப்பெண் அணி (Complex Matrix) என்றும் கூறப்படுகிறது.

6.2. (3) நிரைகள், நிரல்கள் ஆகியவைகளின் எண்ணிக்கை சமமானல் $(m=n)$, அணிக்கு m வரிசை எண் உடைய சதுர அணி (Square Matrix of order n) என்பது பெயர். ஒரு சதுர அணி A. பின்வருமாறு :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \; a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

இதில் $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ஒரு மூலைவிட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. இந்த மூலைவிட்டத்துக்குத் 'தலைமை மூலைவிட்டம்' (Principal or leading diagonal) என்பது பெயர். இதன் பொருள்களுக்கு மூலைவிட்டப் பொருள்கள் (Diagonal elements) என்பது பெயர்.

6.2. (4) ஒரு $m \times n$ அணியில் எல்லாப் பொருள்களும் பூச்சியமானல், அதற்கு $m \times n$ பூச்சிய அணி (Zero Matrix) 0^{n}_{m} என்பது பெயர்.

6.2. (5) ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்டப் பொருள்கள் 1 ஆக இருந்தும், மற்றப் பொருள்களெல்லாம் பூச்சியங்களாக இருந்தால், அணிக்கு 'அலகு அணி' (Unit matrix) என்பது பெயர். இந்த அணியில் நிரைகள் அல்லது நிரல்களின் எண்ணிக்கை 'n' ஆனல், அணிக்கு 'n' வரிசை எண்ணுடைய அலகு அணி (Unit Matrix of order n) அல்லது n நிரைகள் கொண்ட அலகு அணி (n-rowed unit Matrix) என்பது பெயர். இந்த அணி I_n என எழுதப்படுகிறது.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2. (6) ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்டப் பொருள்களைத் தவிர மற்றப் பொருள்கள் எல்லாம் பூச்சியங்கள் ஆனால் அந்த அணிக்கு ஒரு **மூலைவிட்ட அணி** (Diagonal Matrix) என்பது பெயர். இதைக் கீழ்க்கண்ட விதங்களில் குறிக்கலாம்.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} = d_g(\alpha_1 \; \alpha_2 \; \dots \; \alpha_n)$$

6.2. (7) ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் எல்லா மூலைவிட்டப் பொருள் களும் சமமானால், அதற்கு ஒரு **திசையிலி அணி** (Scalar Matrix) என்பது பெயர். அதை

$d_g(\alpha \; \alpha \; \alpha \; \alpha \; \dots \; \alpha)$ எனக் குறிக்கலாம்.

6.2. (8) ஒரு சதுர அணியில் தலைமை மூலை விட்டத்துக்குக் கீழே உள்ள பொருள்களெல்லாம் பூச்சியங்களானால் அதாவது $a_{ij} = 0$ $(i > j)$ அதற்கு **மேல் முக்கோண அணி** (Upper Triangular Matrix) என்பது பெயர்.

உ-ம்.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ o & d & c \\ o & o & f \end{bmatrix}$$

ஒரு சதுர அணியில் தலைமை மூலை விட்டத்துக்கு மேலே உள்ள பொருள்களெல்லாம் பூச்சியங்களானால் அதாவது $a_{ij} = o \; (i < j)$ அந்த அணிக்குக் **கீழ் முக்கோண அணி** (Lower Triangular Matrix) என்பது பெயர்.

உ-ம்.

$$\begin{bmatrix} a & o & o \\ b & c & o \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

ஓர் அணி. ஒரே நேரத்தில் மேல் முக்கோண அணியாகவும், கீழ் முக்கோண அணியாகவும் இருந்தால், அது ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகத் (Diagonal Matrix) தான் இருத்தல் வேண்டும்.

6.2. (9) ஓர் அணி A-ன் நிரைகளையும், நிரல்களையும் ஒன்றுக் கொன்றாக வரிசைப்படி இடம் மாற்றினால், கிடைக்கக் கூடிய அணிக்கு, A-ன் மாற்றல் அணி A^{T} (Transpose of A) என்பது பெயர்.

அதாவது, $A = (a_{ij})$ என்றால், $A^{\mathrm{T}} = (b_{ij})$, இதில் $b_{ij} = a_{ij}$ அதாவது, A^{T}-ன் பொருள் b_{ij}, A-ன் பொருள் a_{ij} க்குச் சமம்.

உ-ம்.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = A;$$

உ-ம் $$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$ என்பதை உணரலாம். அதாவது A, A^{T} ஆகியவை தங்களுக்குள் சமச்சீர்த் தன்மை உடையவை.

6.2. (10) ஓர் அணியில் n பொருள்கள் கொண்ட ஒரே ஒரு நிரல் மாத்திரம் இருந்தால், இதற்கு $(n \times 1)$ நிரல் அணி (Column Matrix) என்பது பெயர்.

உ-ம். $$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ஓர் அணியில், n பொருள்கள் கொண்ட ஒரே ஒரு நிரை மாத்திரம் இருந்தால் அதற்கு $(1 \times n)$ நிரை அணி (Row Matrix) என்பது பெயர்.

உ-ம். $A = [\, x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n \,]$

ஒரு நிரல் அணியின் மாற்றல் அணி, ஒரு நிரை அணியாகிறது (The Transpose of a column Matrix is a row Matrix).

ஒரு நிரை அல்லது நிரல் அணியை ஒரு நிரை அல்லது நிரல் வெக்டராகக் கருதலாம். (Row or Column vector).

பொதுவாக, A என்ற ஒரு $m \times n$ அணியிலுள்ள ஒவ்வொரு நிரையையும் அல்லது நிரலையும் நிரை அல்லது நிரல் வெக்டராகக் கருதலாம்.

A-ன், 'i' வரிசை எண்ணுடைய நிரையை $A\, i \otimes$ என்றும், 'j' வரிசை எண்ணுடைய நிரலை $A \otimes j$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

[$\otimes \rightarrow$ Star எனப்படுகிறது.]

$$\left(A\, i \otimes\right)^{T} = \left(A^{T}\right)_{\otimes\, i};\ \left(A \otimes j\right)^{T} = \left(A^{T}\right)_{j \otimes}$$

என்பவைகளை உணரலாம். உதாரணமாக, முதல் முடிவு, A-ன் i வரிசையுள்ள நிரை மாற்றல் அணி, A^{T}-ன், i வரிசையுள்ள நிரல் அணியாகும். (The transpose of the i th row Matrix of A = the i th column Matrix of A^{T})

6.2 (11) ஒரு கலப்பெண் அணி A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு கலப்பெண்ணுக்கும் பதிலாக அதன் துணைக் கலப்பெண்ணை (Conjugate complex number) எழுதினால், கிடைக்கும் அணிக்குத் **துணைக் கலப்பெண் அணி** $\overline{\mathbf{A}}$ (Conjugate Matrix) என்பது பெயர்.

அதாவது $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & 3-2i & 3+4i \\ 4-5i & 5+6i & 6-7i \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & 3+2i & 3-4i \\ 4+5i & 5-6i & 6+7i \end{bmatrix}$$

6.2. (12) A என்ற கலப்பெண் அணியின் மாற்றல் அணியின், துணைக் கலப்பெண் அணிக்கு A-ன் '**மாற்றலின் துணை அணி** $\overline{A^{T}}$ (Conjugate Transpose of A) என்பது பெயர்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 4+5 \\ 3-2 & 5+2i & 2-i \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}^{T} = \begin{bmatrix} 1-i & 3+2i \\ 2+3i & 5-2i \\ 4-5i & 2+i \end{bmatrix}$$

$\overline{A^{T}} = \overline{A}^{T}$ என்பதை உணரலாம்.

6. 2. (13) ஒரு சதுர அணி A-ல் $a_{ij} = a_{ji}$ என்று இருந்தால் A ஒரு சமச்சீர் அணி (**Symmetric Matrix**) எனப்படுகிறது.

(உ - ம்.)

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$

இதில், உதாரணமாக $a_{23} = a_{32} = f$

A, ஒரு சமச்சீர் அணியானல் $A = A^{T}$ என்பதை உணரலாம்.

6.2. (14) ஒரு சதுர அணி A-ல் $a_{ij} = -a_{ji}$ என்று இருந்தால், அந்த அணிக்குச் சரிந்த சமச்சீர் அணி (**Skew - Symmetric Matrix**) என்பது பெயர்.

(உ - ம்.)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix}$$

இதில், உதாரணமாக $a_{13} = -a_{31} = g$. இதில் தலைமை மூலை விட்டப் பொருள்கள் பூச்சியங்களாக இருத்தல் வேண்டும் ஏனெனில், $a_{ii} = -a_{ii}$ என இருப்பின் $a_{ii} = 0$ என்று தான் இருத்தல் வேண்டும்.

மேலும், $A = -A^{T}$ என்பதை உணரலாம்.

6.2. (15) ஒரு கலப்பெண் சதுர அணியில் $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, அதாவது a_{ij} என்ற பொருள், a_{ji} என்ற பொருளின் துணைக் கலப்பெண்ணாக இருந்தால் A, ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி (Hermitian Matrix) எனப்படுகிறது.

(உ-ம்)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3+i & 4-i \\ 3-i & 4 & 2-3i \\ 4+i & 2+3i & 5 \end{bmatrix}.$$

உதாரணமாக, இதில் $a_{23} = \overline{a_{32}} = 2 - 3i$ என்பதைப் பார்க்கலாம். பிரதான மூலைவிட்டத்திலுள்ள பொருள்கள் மெய்யெண்களாகத் தான் இருத்தல் வேண்டும். ஏனெனில், $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ அதாவது, ஒரு கலப்பெண், தனது துணைக் கலப்பெண்ணுக்குச் சமமானால் அது மெய்யெண்ணாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும். [$a + ib = a - ib$ ஆனால், $b = -b$ அதாவது $b = 0$ என இருத்தல் வேண்டும்.]

மேலும் ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி A, தனது மாற்றலின் துணை அணிக்குச் சமமாகிறது. அதாவது $A = \overline{A}^{T}$ என்பதை உணரலாம்.

6.2. (16) ஒரு கலப்பெண் சதுர அணி A-ல் $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ என்று இருக்குமானால் A ஒரு 'சரிந்த ஹெர்மீஷியன் அணி' (Skew-Hermitian Matrix) எனப்படும்.

(உ-ம்.)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2-3i & 3+4i \\ -2-3i & 0 & 4-5i \\ -3+4i & -4-5i & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix}$$

உதாரணமாக, $a_{23} = -\overline{a_{32}} = -(-4+5i)$
$= 4 - 5i$ என இருக்கிறது.

பிரதான மூலைவிட்டத்தின் பொருள்கள், பூச்சியமாகவோ, அல்லது முற்றிலும் கற்பனை எண்களாகவோ (purely imaginary numbers) இருத்தல் வேண்டும், ஏனெனின்,

$a + ib = -(a - ib)$ என்றால்,

$\therefore\ a + ib = -a + ib$ என ஆகிறது.

இதில், $a = 0$ என அவசியம் இருத்தல் வேண்டும். b-க்குப் பூச்சியம் உள்பட எந்த மதிப்பும் இருக்கலாம். மேலும் $A = -\overline{A}^{T}$ என்பதை உணரலாம்.

6.2. (17) ஒரு சதுர அணி A-யிலுள்ள பொருள்களை ஓர் அணிக் கோவையின் (determinant) பொருள்களாகக் கருதினால் இந்த அணிக் கோவைக்கு, A-ன் அணிக் கோவை $|A|$ என்பது பெயர்.

(உ-ம்.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ஆனால் } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 75$$

ஓர் அணிக்கு 'மதிப்பு' என்ற கருத்தே கிடையாது. ஆனால் அதன் அணிக் கோவைக்கு மதிப்பு உண்டு.

6.2. (18) ஓர் அணியின் அணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சிய மானால் $|A| = 0$, அந்த அணிக்குச் **சிறப்பு அணி** (Singualar Matrix) என்பது பெயர்.

ஓர் அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாக இல்லாதிருந்தால் $|A| \neq 0$, அந்த அணிக்குச் **'சிறப்பு இல்லாத அணி'** (**Non-singular Matrix**) என்பது பெயர்.

6.2. (19) ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்த இரண்டு அணிகளில் ஒத்த பொருள்கள் சமமானால், அணிகள் சமம் எனப்படும்.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$ என்றால், $a_1 = \alpha_1;\ b_1 = \beta_1;\ c_1 = \gamma_1;$
$a_2 = \alpha_2;\ b_2 = \beta_2;\ c_2 = \gamma_2;$
என ஆகின்றன.

6.3. ஓர் அணியை, ஒரு திசையிலி எண்ணால் பெருக்கல் (**Multiplication of a Matrix by a scalar**)

அணி A-யிலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளையும் k என்ற திசையிலி எண்ணால் பெருக்கினால், அது A என்ற அணியை k என்ற திசையிலியி னால் பெருக்குதல் எனப்படுகிறது.

(உ-ம்.) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$; $kA = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$

பொதுவாக $A = (a_{ij})$ ஆனால்,

$$kA = (k\,a_{ij}) = Ak \text{ எனப்படுகிறது}$$

மாதிரி : $1(A) = A;\ oA = 0,\ k0 = 0$

$kI = dg\,(k, k, k, \ldots, k)$ என்பவைகளைச் சுலபமாக உணரலாம்

6.4. ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்த $(m \times n)$ அணிகள் A, B ஆகியவை களின் கூட்டல் பின்வருமாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது:

$A = (a_{ij});\ B = (b_{ij})$ ஆனால்,

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ அல்லது

$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$ என்றும் கூறலாம்.

(உ-ம்.) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

அணிகள் ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்தவையாக இல்லாவிட்டால் அவைகளின் கூட்டலுக்கு வரையறை கிடையாது. (If A and B are not of the same type, $A + B$ is not defined).

பல அணிகள் ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்தவைகளானால் அவைகளின் ஒருபடித்தான சேர்க்கையை, அதாவது

$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ போன்ற கோவையை அடைய முடியும்.

தேற்றம் 6.1.

அணிகளின் கூட்டலில் பரிமாற்று விதியும் (Commutative Law), சேர்ப்பு விதியும் (Associative Law) உண்மைகளாக உள்ளன.

அதாவது,

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

நிறுவல் :

(1) $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ என்க.

$$\{A + B\}_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = \{B + A\}_{ij}$$

ஆகையால் $A + B = B + A$

(2) $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$; $C = (c_{ij})$ என்க.

$$\begin{aligned}\{A + (B + C)\}_{ij} &= [\ a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] \\ &= [\ a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}] \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] \\ &= \{(A + B) + C\}_{ij}\end{aligned}$$

ஆகையால் $A + (B + C) = (A + B) + C$

தேற்றம் 6.2.

அணியைத் திசையிலி எண்ணால் பெருக்குவது, அணிக் கூட்டலின் மேல் பரவுகிறது. [Scelar multiplication cf Matrix, distributes over Matrix addition]

அதாவது, $k(A + B) = kA + kB$.

நிறுவல் : $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ என்க.

$$\begin{aligned}\{k(A + B)\}_{ij} &= k(a_{ij} + b_{ij}) = (ka_{ij} + kb_{ij}) \\ &= (ka_{ij}) + (kb_{ij}) = \{kA\}_{ij} + \{kB\}_{ij}\end{aligned}$$

ஆகையால் $= k(A + B) = kA + kB$

6.5. அணிகளின் கழித்தல் (Subtractions of Matrices)

ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்த A, B என்ற இரண்டு அணிகள் கொடுக்கப்பட்டால் $A + X = B$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு X என்ற பிரத்தியேகமான தீர்வு கண்டுபிடிக்கலாம். இத்தீர்வுக்கு

$X = B - A$, அதாவது B, A ஆகியவைகளின் வித்தியாசம் என்பது பெயர்.

உதாரணமாக $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ என்க.

$X = (b_{ij} = a_{ij})$ என்று ஓர் அணியை எடுப்போம்.

$A + X = (a_{ij} + b_{ij} - a_{ij}) = (b_{ij}) = B$ என ஆகிறது.

ஆகையால் $X = B - A = (b_{ij} - a_{ij})$ என ஆகிறது.

உதாரணமாக.

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

தேற்றம் 6.3.

எல்லா $m \times n$ அணிகளின் கணம், கூட்டலின் சார்பாக ஒரு 'ஏபெலியன் குல'மாகிறது.

எல்லா $m \times n$ அணிகளின் கணம்,

$M = \{A, B, C, D \ldots\ldots\ldots\ldots\}$ என்க.

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M$.

ஆகையால் அடைப்பு விதி சரியாகிறது.

தேற்றம் 6.1-ன்படி, $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ என ஆகிறது.

ஆகையால் சேர்ப்பு விதி சரியாகிறது.

$m \times n$ பூச்சிய அணியை 0 என்க.

$0 \in M$

$A + 0 = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}] = A$

$= 0 + A$ என இருக்கிறது.

ஆகையால், 0 என்ற முற்றொருமை அணி, கணத்திலிருக்கிறது.

A என்ற அணியை எடுப்போம். இதற்குத் தகுந்தவாறு $-A = (-a_{ij})$ என்ற அணியைக் கருதுவோம். இப்பொழுது,

$A + (-A) = (-A + A) = (a_{ij} - a_{ij}) = (o) = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகையால் A-க்குத் தகுந்த எதிர் அணி M-ல் உள்ளது.

மேலும் $A + B = B \cdot A$ என்பது உண்மையானபடியால்

M என்ற கணம் ஓர் ஏபெலியன் குலம் ஆகிறது.

6.6. அணிகளின் பெருக்கல் (Matrix multiplication)

A, ஒரு $(l \times m)$ அணி என்க. B ஒரு $(m \times n)$ அணி என்க. அதாவது A-ன் நிரல்களின் (columns) எண்ணிக்கை B-ன் நிரை களின் (rows) எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருந்தல் வேண்டும். 'AB' என்ற பெருக்கல் பலன் கீழ்க்கண்ட பொதுப் பொருள்களைக் கொண்ட ஒரு $(l \times n)$ அணியாகும் :

$$(AB)_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \ldots\ldots\ldots + a_{im} b_{mj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

அதாவது (AB)-ன் 'ij' என்ற பொதுப் பொருள் A-ன் 'i' வரிசை யுள்ள நிரை, B-ன் 'j' வரிசையுள்ள நிரல் ஆகியவைகளின் 'உட் பெருக்கு' (inner produt of the i^{th} row of A and j^{th} column of B).

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

என்றால் AB ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.1 + 1\cdot3 & 2\cdot1 + 1\cdot(-4) & 2(-2) + 1\cdot3 \\ -1\cdot1 + 3\cdot3 & -1\cdot1 + 3\cdot(-4) & -1(-2) + 3\cdot3 \\ 1\cdot1 + 0\cdot3 & 1\cdot1 + 0\cdot(-4) & 1(-2) + 0\cdot3 \\ 5\cdot1 + 2\cdot3 & 5\cdot1 + 2\cdot(-4) & 5(-2) + 2\cdot3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 8 & -13 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \\ 11 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

உதாரணமாக. பெருக்கலின் a_{32} வேண்டுமென்ருல் A-ன் 3 ஆவது நிரை B-ன் 2 ஆவது நிரல் ஆகியவைகளின் உட்பெருக்குக் காண வேண்டும்.

6.7. அணிகளின் பெருக்கலைக் கீழ்க்கண்ட ஒரு பயனுள்ள விதத்திலும் குறிக்கலாம்.

$R_1, R_2, \ldots \ldots R_l$ என்பவைகள் A-ன் நிரைகள் என்க.

$C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$ என்பவைகள் B-ன் நிரல்கள் என்க.

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_l \end{bmatrix} \times [\, C_1\ C_2\ C_3 \ldots C_n \,] = \begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 & \ldots & R_1 C_n \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 & \ldots & R_2 C_n \\ R_3 C_1 & R_3 C_2 & \ldots & R_3 C_n \\ \vdots & \vdots & & \ldots \\ & & & \ldots \\ R_l C_1 & R_l C_2 & \ldots & R_l C_n \end{bmatrix}$$

என்று எழுதலாம்.

6.8. சாதாரண இயற் கணிதத்தில், $|A|, |B|$ என்ற இரண்டு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கலைக் கீழ்க்கண்ட விதத்தில் அடையலாம் என்பதை நினைவில் கொள்வோம்.

$$|A|\ |B| = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 r_1 & R_1 r_2 & R_1 r_3 \ldots R_1 r_n \\ R_2 r_1 & R_2 r_2 & R_2 r_3 \ldots R_2 r_n \\ R_3 r_1 & R_3 r_2 & R_3 r_3 \ldots R_3 r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ R_n r_1 & R_n r_2 & R_n r_3 \ldots R_n r_n \end{bmatrix}$$

பெருக்கல் பலனில் $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n$ ஆகியவைகளுக்குப் பதிலாக $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$ என எழுதினுல் 6.7-ல் உள்ள அணிப் பெருக்கல் பலன் கிடைக்கும் என உணரலாம். அதாவது, இரண்டாவது அணிக் கோவையை நிரை-நிரல் மாற்றம் (Transposition) செய்து அணிக் கோவையைப் பெருக்கல் செய்தால், அணிப் பெருக்கல் கிடைக்கிறது. இக் கருத்தைப் பின்பற்றிக் கீழ்க்கண்ட முக்கியமான தேற்றத்தை அடைகிருேம்.

தேற்றம் 6.4.

A, B ஆகியவைகள் (n)-வரிசை கொண்ட சதுர அணிகளானுல்

$$|AB| = |A|\ |B|.$$

வலக்கைப் பக்கம், இரண்டு அணிக் கோவைகளின் பெருக்கல் பலன். இதில் $|B|$ என்ற அணிக் கோவையை நிரை-நிரல் மாற்றம் (Trans-

position) செய்வோம். இதனுல் $|B|$-ன் மதிப்பு மாருது என்பது அணிக் கோவையின் தன்மைகளுள் ஒன்று.

$$|A|\ |B| = |A|\ |B|^{T}$$

ஆனுல், இரண்டாவது அணிக் கோவையை மாற்றம் செய்து அதனுல் முதல் அணிக் கோவையைப் பெருக்கினுல் A, B ஆகியவைகளின் அணிப் பெருக்கல் பலன் கிடைக்குமென 6.8-ல் பார்த்தோம். ஆகையால்

$|A|\ |B| = |A|\ |B|^{T} = |AB|$ எனக் கிடைக்கிறது.

6.9. (AB) என்ற அணிப் பெருக்கலில் A என்பதற்கு முன் காரணி (Pre factor) என்றும், B என்பதற்குப் பின் காரணி (Post-factor) என்றும் பெயர். முன் காரணியிலுள்ள நிரல்களின் (Cloumns) எண்ணிக்கை, பின் காரணியிலுள்ள நிரைகளின் (Rows) எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். இதை "*C.R*" விதி என்று நினைவில் வைத்துக் கொள்ளலாம். இவ்விதம் அணிகள் இருந்தால்தான் அவைகள் பெருக்கலுக்கு உகந்தவைகள் (Conformable for multiplication) எனப்படுகின்றன. இந்த விதி உண்மையாக இராவிட்டால் (AB) என்ற பெருக்கலுக்கு வரையறையே கிடையாது. அணிப் பெருக்கலில் பரிமாற்று விதி (Commutative Law) பொதுவாக உண்மையல்ல. அதாவது, $AB \neq BA$. உதாரணமாக A ஒரு $(l\times m)$ அணி என்றும், B ஒரு $(m\times n)$ அணி என்றும் வைப்போம். (AB) என்பது ஒரு $(l\times n)$ அணி. BA என்று எடுத்தால், B-ல் n நிரல்களும் A-ல் l நிரைகளும் இருப்பதால் (BA) என்ற அணியே கிடையாது. B ஒரு $(m\times l)$ அணியாக இருந்தால் (BA) என்ற பெருக்கல் பலன் உண்டு. ஆனுல் $(AB) = (BA)$ என்றிருத்தல் அவசியமில்லை.

உதாரணம் :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகைய்ால் பொதுவாக $AB \neq BA$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆனுல் $AB = BA$ என்று இருக்குமாறு, தகுந்த முறையில், தனிப்பட்ட அணிகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம். அணிப் பெருக்கல்களின் சில மாதிரிகளைக் கீழே பார்ப்போம்.

மாதிரி 1 : கீழ்க்கண்டவைகளில் $(A\ B)$ என்ற பெருக்கல் பலன் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) $\underset{(2\times 3)}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $\underset{(3\times 2)}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\underset{(2\times 2)}{A\,B} = \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 1(-1) + 2\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 2(-1) + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $\underset{(4\times 1)}{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\underset{(1\times 4)}{B} = [\,4 \quad 2 \quad -1 \quad 0\,]$

$$\underset{(4\times 4)}{A\,B} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 & 3\cdot 2 & 3(-1) & 3\cdot 0 \\ 0\cdot 4 & 0\cdot 2 & 0(-1) & 0\cdot 0 \\ 5\cdot 4 & 5\cdot 2 & 5(-1) & 5\cdot 0 \\ 1\cdot 4 & 1\cdot 2 & 1(-1) & 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) $\underset{(1\times 4)}{A} = [2 \ 3 \ 4 \ 5]$; $\underset{(4\times 1)}{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\underset{(1\times 1)}{A\,B} = [2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4]$$

$$= [40]$$

(iv) $\underset{(1\times 3)}{A} = [x\,y\,z]$; $\underset{(3\times 3)}{B} = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ $\underset{(3\times 1)}{C} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\underset{(1\times 1)}{A(B\,C)} = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} ax + hy + gz \\ hx + by + fz \\ gx + fy + cz \end{bmatrix}$$

$$= [ax^2 + hxy + gzx + hxy + by^2 + fzy + gxz + fyz + cz^2]$$

$$= [ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy]$$

தேற்றம் 6.5.

அணிப் பெருக்கலில் சேர்ப்பு விதி (Associative law) உண்மையானது.

அதாவது $A(BC) = (AB)C$ என நிறுவுக.

நிறுவல்: A ஒரு $p \times q$ அணி (a_{ij}) என்க.

B ஒரு $q \times r$ அணி (b_{ij}) என்க.

C ஒரு $r \times s$ அணி (c_{ij}) என்க.

ஆகையால் $A(BC)$, மற்றும் $(AB)C$ என்ற பெருக்கல் பலன்கள் உள்ளன.

$$\left\{ A(BC) \right\}_{ij} = \sum_k a_{ik} (BC)_{kj}$$

$$= \sum_k a_{ik} \left\{ \sum_l b_{kl} c_{lj} \right\}$$

$$= \sum_{k,l} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$\left\{ (AB)C \right\}_{ij} = \sum_l (AB)_{il} c_{lj}$$

$$= \sum_l \left\{ \sum_k a_{ik} b_{kl} \right\} c_{lj}$$

$$= \sum_{k,l} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

ஆகையால், $\{ A(BC) \} = \{ (AB)C \}$

கிளைத் தேற்றம்: $A^1 = A$; $A^2 = A \cdot A$; $A^3 = AAA\ldots\ldots$ என்க.

$A^{r+s} = AAA \ldots\ldots\ldots A$ ($r+s$, தடவைகள்)

$= (AA \ldots\ldots A)\ (AA \ldots\ldots A)$ →தேற்றம் 6.4

'r' தடவைகள் 's' தடவைகள்

$= A^r . A^s$.

$(A^r)^s = (A^r)(A^r)\ldots\ldots\ldots(A^r)$ s தடவைகள்

$= AAA \ldots\ldots\ldots A$ (rs தடவைகள்)

$= A^{rs}$

தேற்றம் 6·6.

அணிப் பெருக்கல், அணிக் கூட்டலின் மேல் பரவுகிறது (Matrix multiplication distributes over Matrix addition). அதாவது,

$$A(B+C) = AB + AC$$

நிறுவல் : A, ஒரு $p \times q$ அணி (a_{ij}) என்க.

B, ஒரு $q \times r$ அணி (b_{ij}) என்க.

C, ஒரு $q \times r$ அணி (c_{ij}) என்க.

$$\{A(B+C)\}_{ij} = \sum_k a_{ik}(B+C)_{kj}$$

$$= \sum_k a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$

$$= \sum_k a_{ik} b_{kj} + \sum_k a_{ik} c_{kj}$$

$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}$$

$$= (AB + AC)_{ij}$$

ஆகையால் $A(B+C) = AB + AC$ என ஆகிறது.

தேற்றம் 6.7.

மூலைவிட்டத்தில் பூச்சியப் பொருள்கள் அல்லாத வெவ்வேறு பொருள்கள் கொண்ட ஒரு மூலைவிட்ட அணி D உடன், A என்ற ஓர் அணி, பெருக்கலில் பரிமாற்றங் கொண்டால் (Commutes in multiplication) A-ம், ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும்.

$$D = dg(d_{11}, d_{22}, \ldots\ldots, d_{nn})$$

மேலும் $D = (d_{ij})$; இதில் $d_{ij} = 0,\ i \neq j,\ d_{ij} \neq 0,\ i = j$

$$A = (a_{ij})$$

கொள்கைப்படி $AD = DA$.

ஆகையால் $(AD)_{ij} = (DA)_{ij}$

அல்லது $\sum_k a_{ik} d_{kj} = \sum_k d_{ik} a_{kj}$ —I

இடக் கைப்பக்கத்தில் $k = j$ என்றால்தான் d_{kj} க்கு மதிப்பு உண்டு. $(= d_{jj})$.

வலக் கைப்பக்கத்தில் $k = i$ என்றால் தான் d_{ik} க்கு மதிப்பு உண்டு $(= d_{ii})$.

ஆகையால், (I)-ன்படி

$$a_{ij}\ d_{jj} = d_{ii}\ a_{ij}$$

அல்லது $a_{ij}\ (d_{jj} - d_{ii}) = 0$

$i \neq j$ என்றால் $d_{jj} \neq d_{ii}$ → கொள்கை.

ஆகையால், $i \neq j$ என்னுமிடத்தில் $a_{ij} = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால், $A = (a_{ij})$ ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும்.

6.10. அணிகளின் சில முக்கியமான பயன்களைப் பார்ப்போம் :

(1) ஒருபடித்தான சமன்பாடுகள் பலவற்றைச் சுருக்கமான முறையில் எழுதலாம். கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளை எடுப்போம் :

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\,x_n = y_1$$
$$a_{21}\,x_{21} + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\,x_n = y_2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{m_1}\,x_1 + a_{m_2}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\,x_n = y_n$$

இவைகளை

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix}$$

அல்லது $AX = Y$ என எழுதலாம். இதில் A என்பது ஒரு $m \times n$ அணி ; $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)^T$ என்ற வெக்டர். $Y = (y_1, y_2, \ldots y_m)^T$ என்ற வெக்டர்.

மேலும், இதே சமன்பாடுகளை, n நிரல் அணிகளின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம் :

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m_1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m_2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots\ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix}$$

அல்லது $A \oplus_1 x_1 + A \oplus_2 x_2 + \ldots\ldots + A \oplus_n x_n = Y.$

(2) ஒருபடித்தான பிரதியீடுகளைச் சுலபமான முறையில் செய்யலாம்.

உதாரணமாக,

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \text{ என்க.} \qquad \text{—I}$$

$$y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2$$

$$y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \text{ என்க.} \qquad \text{—II}$$

x_1, x_2 - க்களை z_1, z_2 —ன் சார்பாகக் கூற வேண்டுமானால், y_1, y_2 ஐ இவைகளுக்குப் பிரதியீடு செய்கிறோம்.

$$x_1 = a_{11}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{12}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2)$$

$$x_2 = a_{21}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{22}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2)$$

அல்லது, $x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})z_2$

$$x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})z_2$$

அல்லது $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ —III

இவ்வளவு சுற்றலான முறைக்குப் பதிலாக

(I) ஐ $X = A\,Y$ என்றும், (II) ஐ $Y = B\,Z$ என்றும் எழுதலாம்.

இதில் $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. ஆகையால், $X = A\,B\,Z$ என்று உடனே எழுதி விடலாம். III-ல் உள்ள அணி (AB) தான் என்பதைச் சரி பார்க்கலாம்.

தேற்றம் 6.8.

மாற்றல் அணிகளின் எதிரிடை விதி (Reversal Law for Transposes)

A, B என்பன, (AB) எனும் பெருக்கலுக்குகந்த இரண்டு செவ்வக அணிகளானால்,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

நிறுவல் :

A ஒரு $(l \times m)$ அணி (a_{ij}) என்க.

B ஒரு $(m \times n)$ அணி (b_{ij}) என்க

ஆதலால் B^T ஒரு $(n \times m)$ அணி.

A^T ஒரு $(m \times l)$ அணி.

ஆதலால், இரண்டு பக்கங்களிலுள்ள பெருக்கல் பலன்கள் உண்டு.

$$\left\{ (A\,B)^{T} \right\}_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k} a_{jk}\, b_{ki}$$

$$= \sum_{k} \left(A^{T} \right)_{kj} \left(B^{T} \right)_{ik}$$

$$= \sum_{k} \left(B^{T} \right)_{kj} \left(A^{T} \right)_{ik}$$

$$= \left(B^{T} A^{T} \right)_{ij}$$

ஆகையால், $(A\,B)^{T} = B^{T} A^{T}$

மாதிரி: கீழ்க்கண்டவைகளை நிறுவுக:

(1) $(\alpha\, A)^{T} = \alpha\, A^{T}$

(2) $(A + B)^{T} = A^{T} + B^{T}$

(1) $$\left\{ (\alpha\, A)^{T} \right\}_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha\, (A)_{ji}$$

$$= \alpha \left(A^{T} \right)_{ij}$$

$$\therefore (\alpha\, A) = \alpha\, A^{T}$$

(2) $$\left\{ (A + B)^{T} \right\}_{ij} = (A + B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji}.$$

$$= \left(A^{T} \right)_{ij} + \left(B^{T} \right)_{ij}$$

$$= \left(A^{T} + B^{T} \right)_{ij}$$

ஆகையால் $(A + B)^{T} = A^{T} + B^{T}$

6.11. அலகு அணி I ஐ (δ_{ij}) எனக் குறிப்பதுண்டு; இதில், $i=j$ என்ருல் $\delta_{ij}=1$ என்றும், $i \neq j$ என்ருல் $\delta_{ij}=0$ என்றும் கொள்ளப்படுகிறது.

அதாவது $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$

தேற்றம் 6.9.

A, ஒரு சதுர அணியாஞல், $AI = IA = A$.

நிறுவல் : $(AI)_{ij} = \sum_k a_{ik} \delta_{kj}$

$k=j$ என்னுமிடத்தில்தான் δ க்கு மதிப்பு 1; $k \neq j$ என்னுமிடங்களில் δ-ன் மதிப்பு 0.

ஆகையால் $\sum_k a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij} \delta_{jj} = a_{ij}$.

ஆகையால் $(AI)_{ij} = a_{ij} = (A)_{ij}$ ஆகையால் $AI = A$

இதேபோல, $(IA)_{ij} = \sum_k \delta_{ik} a_{kj} = \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij} = (A)_{ij}$

ஆதலால் $IA = A$.

குறிப்பு : சாதாரண இயற்கணிதத்தில் 1 என்ற எண்ணின் தன்மையை, I என்ற அலகு அணி, அணி இயற்கணிதத்தில் (Matrix Algebra) பெற்றிருக்கிறது.

6.12.

சதுர அணி A-ன் அடுத்திரு அணி (Adjoint or Adjugate) Matrix) : $|A|$ என்ற அணிக்கோவையில் ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் தகுந்த துணைக் காரணி (Co-factor) உண்டு என்பதை இப்பொழுது நினைவில் கொள்வோம்.

வரையறை : A என்ற சதுர அணியின் பொருள்களின் துணைக் காரணிகளாலான அணியின் மாற்றல் அணிக்கு A-ன் அடுத்திரு அணி (Adjugate Matrix or Adjoint என்பது பெயர். [The Adjugate Matrix of A is the Transpose of the Matrix of Cofactors of the elements of A.] இதை $A^{\otimes}$ (A star), 'A-அடுத்திரு' எனக் கூறுவோம்.

உதாரணம் (1): $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$;

$A^{\otimes} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$. இதில்

$A_1 = a_1$-ன் துணைக் காரணி $= b_2 c_3 - b_3 c_2$

$B_1 = b_1$-ன் துணைக் காரணி $= -(a_2 c_3 - a_3 c_2)$ முதலியன

உதாரணம் (2):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

தேற்றம் **6.10.**

$$A A^{\otimes} = A^{\otimes} A = |A| I$$

நிறுவல்: $A^{\otimes}$, A-ன் அடுத்திரு அணி.

$(A) = (a_{ij})$; $A^{\otimes} = (b_{ij})$ எனின்,

$(b_{ij}) = C_{ji} = |A|$-ல் '$j\,i$' என்ற பொருளின் துணைக் காரணி.

அணிக் கோவைகளின் கீழ்க்கண்ட தன்மைகளை நினைவிற் கொள்வோம்:

$a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots\ldots + a_{in} C_{in} = |A|$

$a_{i1} C_{k1} + a_{i2} C_{k2} + \ldots\ldots + a_{in} C_{kn} = 0$

$$(AA^{\otimes})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{jk}$$

$= |A|$, $i = j$ என்றால்.

$= 0$, $i \neq j$ என்றால்,

$= |A|\ \delta_{ij}$ (இதில் $\delta_{ij} = 1$, $i = j$ என்றால்,

$= 0$, $i \neq j$ என்றால்.

$= |A|\ (I)_{ij}$ (I = அலகு அணி)

ஆகையால் $AA^{\otimes} = |A|\,I$

இதேபோல,

$$(A^{\otimes}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\, a_{kj}$$

$= |A|$, $i = j$ என்ருல்,

$= 0$, $i \neq j$ என்ருல்,

$= |A|\,\delta_{ij} = |A|\,(I)_{ij}$

ஆகையால் $A^{\otimes}A = |A|\,I.$

தேற்றம் 6.11.

கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் உண்மை.

A, சிறப்பு இல்லாத அணியாளுல்,

(1) $|A^{\otimes}| = |A|^{n-1}$

(2) $(A^{\otimes})^{\otimes} = |A|^{n-2} A.$

நிறுவல் :

(1) $AA^{\otimes} = |A|\,I$ — **தேற்றம் 6.8**

$$|AA^{\otimes}| = \big|\,|A|\,I\,\big| = |A|^{n}$$

அல்லது $|A|\,|A^{\otimes}| = |A|^{n}$

அல்லது $|A^{\otimes}| = |A|^{n-1}$

(2) $AA^{\otimes} = |A|\,I$

இதில் A-க்குப் பதிலாக $A^{\otimes}$ ஐ எழுதுவோம்.

$A^{\otimes}\, A^{\otimes\otimes} = |A^{\otimes}|\,I$

$= |A|^{n-1} I$ — **தேற்றம் 6.11**

$$AA^{\otimes} A^{\otimes\otimes} = |A|^{n-1} AI$$

அல்லது $|A| I A^{\otimes\otimes} = |A|^{n-1} A$

அல்லது $A^{\otimes\otimes} = |A|^{n-2} A.$

தேற்றம் 6.12.

அடுத்திரு அணிகளின் எதிரிடை விதி (Reversal Law for Adjugates)

A, B என்பன சிறப்பில்லாத அணிகளானல்,

$$(AB)^{\otimes} = B^{\otimes} A^{\otimes}$$

நிறுவல் :

$$
\begin{aligned}
|A|\ |B|\ B^{\otimes}A^{\otimes} &= |AB|\, I B^{\otimes} A^{\otimes} \\
&= (AB)^{\otimes}(AB)\, B^{\otimes} A^{\otimes} \\
&= (AB)^{\otimes} A\, (BB^{\otimes})\, A^{\otimes} \\
&= (AB)^{\otimes} A\ |B|\, I A^{\otimes} \\
&= |B|\ (AB)^{\otimes} AA^{\otimes} \\
&= |B|\, (AB)^{\otimes}\ |A|\, I \\
&= |A|\ |B|\, (AB)^{\otimes}
\end{aligned}
$$

ஆகையால், $(AB)^{\otimes} = B^{\otimes} A^{\otimes}$

6.13. A-ன் எதிர் அணி (Inverse Matrix of A)

சாதாரண இயற் கணிதத்தில் எந்த எண் 'a'க்கும் தகுந்தவாறு, $ax = xa = 1$ என்று இருக்குமாறு, $x = a^{-1}$ என்ற பிரத்தியேகமான எதிர் எண் இருக்கிறது. அதேபோல, அணி இயற் கணிதத்திலும், $AA^{\otimes} = |A|\ I$ என்ற முடிவிலிருந்து, $|A| \neq 0$ என்றிருந்தால்,

$AX = XA = I$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு, $X = \dfrac{A^{\otimes}}{|A|}$ என்ற பிரத்தியேகமான தீர்வு உள்ளது.

$$\left[\frac{AA^{\otimes}}{|A|} = \frac{|A|\, I}{|A|} = I\right]$$

இத்தீர்வு பிரத்தியேகமானது; ஏனெனின் முடிந்தால், $AY = I$ என இருக்குமாறு Y என்ற மற்றொரு தீர்வு இருக்கட்டும்.

$X = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$

ஆதலால் $Y = X$.

இந்தத் தீர்வுக்கு, A-ன் எதிர் அணி A^{-1} என்பது பெயர்.

அதாவது, A-ன் எதிர் அணி

$$A^{-1} = \frac{A^{\otimes}}{|A|} \quad \text{. அதாவது, } AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

மாதிரி 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்றால், A^{-1} ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$|A| = ad - bc \neq 0$. எனக் கொள்வோம்.

$$A^{-1} = \frac{A^{\otimes}}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad-bc} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

தேற்றம் 6.13.

A ஒரு சிறப்பு இல்லாத அணி (Non-singular Matrix) அதாவது $|A| \neq 0$ என்றால்,

$AX = B$; $YA = D$ என்ற சமன்பாடுகளுக்குப் பிரத்தியேகமான தீர்வுகள் உண்டு.

$AX = B$ என்பதை எடுப்போம்.

$|A| \neq O$ என்பதால் A^{-1} என்ற A-ன் எதிர் அணி உண்டு. இரண்டு பக்கங்களையும் A^{-1} ஆல் முன் பெருக்கல் (Pre-multiplica-tion) செய்வோம்.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

அல்லது $IX = A^{-1}B$

அல்லது $X = A^{-1}B$ எனக் கிடைக்கிறது.

X என்ற தீர்வு பிரத்தியேகமானது. ஏனெனில், முடிந்தால் X_0 என்ற மற்றொரு தீர்வு இருக்கட்டும்.

$$AX = AX_0 = B. \quad A^{-1}AX = A^{-1}AX_0 \quad \therefore X = X_0$$

$YA = D$. இரண்டு பக்கங்களையும் A^{-1} ஆல் பின் பெருக்கல் செய்வோம்.

$$Y A A^{-1} = D A^{-1}$$

அல்லது $Y I = D A^{-1}$

அல்லது $Y = D A^{-1}$

Y பிரத்தியேகமானது என்றும் காண்பிக்கலாம்.

தேற்றம் 6.14.

எதிர் அணிகளின் எதிரிடை விதி (Reversal Law for Inverses)

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

நிறுவல் :

$$(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A (B B^{-1}) A^{-1}$$
$$= A I A^{-1}$$
$$= A A^{-1} = I$$

ஆகையால் $B^{-1} A^{-1}$ என்பது (AB)-ன் எதிர் அணி

ஆகையால் $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

மாதிரி 3 : அணி முறையில் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணவும்.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

இவைகளை $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$ என எழுதலாம்

அல்லது $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} A X = A^{-1} B$$

அல்லது $X = A^{-1} B$

$$A^{-1} = \frac{A^{\otimes}}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & -4 & 10 \\ 3 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}}{15}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

தீர்வு வெக்டர்

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{2}{8} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

அல்லது $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

அல்லது ; $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$

மாதிரி 4 : கீழ்க்கண்டவைகளை நிறுவுக:

(1) A, சிறப்பு இல்லாத அணியாக இருந்தால் A^{-1}-ம் சிறப்பு இல்லாத அணி ஆகும்.

(2) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

(3) $A^{-r} = (A^{-1})^r$ என்று வரையறை செய்யப்பட்டால்
$A^{-r} = (A)^{r-1}$

(4) $(A^{-1})^{-1} = A$

(5) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

(1) $|A| \neq 0$ என்பதால் A^{-1} இருக்கிறது

$AA^{-1} = I$

$|AA^{-1}| = |I| = 1$

அல்லது $|A|\ |A^{-1}| = 1$. இதில் $|A^{-1}|$, பூச்சியமாக இருக்கமுடியாது. ஆகையால் A^{-1} சிறப்பு இல்லாத அணி ஆகிறது.

(2) $|A|\ |A^{-1}| = 1$ என்பதால் $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$ என ஆகிறது.

(3) $(A^r)^{-1} = (AAAA\ldots\ldots A)^{-1} = A^{-1}A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1} = (A^{-1})^r = A^{-r}$ (வரையறை)

ஆகையால் $A^{-r} = (A^r)^{-1}$

(4) $AA^{-1} = \mathrm{I}$. ஆகையால் A^{-1} என்ற அணிக்கு A எதிர் அணி.

ஆகையால் $(A^{-1})^{-1} = A$

(5) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} . A^{\mathrm{T}}$ .... தேற்றம் 6.8.

Bக்குப் பதிலாக A^{-1} என்று எழுதவும்.

$(AA^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$

அல்லது $(I)^{\mathrm{T}} = (A^{-1})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$

அல்லது $(A^{-1})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$

ஆகையால் $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$, A^{T} -ன் எதிர் அணி

ஆகையால் $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$

6.14. அணி இயற்கணிதத்தில், வகுத்தல் விதி உண்மையல்ல அதாவது, A, B என்பவைசெவ்வக அணிகளாயும், $AB = 0$ என்று மிருந்தால், $A = 0$ அல்லது $B = 0$ என்று இருத்தல் அவசியமில்லை.

இதை ஓர் உதாரணத்தால் விளக்குவோம்.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

இதில் $A \neq 0$; $B \neq 0$; ஆனால் $AB = 0$ என உள்ளது. ஆகையால், 'வகுத்தல் விதி' உண்மையல்ல.

மேலும், இப்படி இருக்கக்கூடிய A, B என்ற அணிகளுக்குப் 'பூச்சியத்தின் காரணிகள்' (Divisors of Zero) என்பது பெயர். சாதாரண இயற்கணிதத்தில், 'பூச்சியத்தின் காரணிகள் கிடையாது.

6.15. அணி இயற்கணிதத்தில் 'வகுத்தல் விதி' ஓரளவுக்கு உண்மையாக உள்ளது என்பதைக் கீழ்க்கண்ட உதாரணத்தில் பார்ப்போம் :

A, B என்பவை சதுர அணிகளாகவும், $AB = 0$ என்றுமிருந்தால் $A = 0$ அல்லது $B = 0$ அல்லது A, B இரண்டுமே சிறப்பு அணிகளாக (Singular Matrices) இருத்தல் வேண்டும்.

A அல்லது $B = 0$ என்று இருந்தால் $AB = 0$ எனக் கிடைக்கும் என்பதை உணரலாம். A அல்லது $B \neq 0$ எனக் கொள்வோம். A, B இரண்டுமே சிறப்பு அணிகளாக இருத்தல் வேண்டும். ஏனெனின், A சிறப்பு இல்லாத அணியாக இருக்கட்டும். ஆதலால் A-ன் எதிர் அணி A^{-1} உண்டு. $AB = 0$ என்ற முடிவில் இரண்டு பக்கங்களையும் A^{-1} ஆல், முன் பெருக்கல் செய்வோம்.

$$A^{-1} A B = A^{-1} 0$$

அல்லது $IB = 0$

அல்லது $B = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

இது கொள்கைக்கு விரோதமானது. ஆகையால் 'A' சிறப்பு இல்லாத அணியாக இருக்கமுடியாது. இதே போல 'B'-ம் சிறப்பு இல்லாத அணியாக இருக்க முடியாது எனக் காண்பிக்கலாம். ஆகையால், A, B இரண்டுமே 'சிறப்பு அணிகளாக' இருத்தல் வேண்டும்.

6.16. அணி இயற்கணிதத்தில் 'நீக்கல் விதி' (Cancellation Law) உண்மையல்ல. அதாவது, A, B என்பவை செவ்வக அணிகளாகவும், $AX = AY$; $A \neq 0$ என்றுமிருந்தால் $X = Y$ என இருத்தல் அவசிய மில்லை. இதை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் விளக்குவோம்.

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad AY = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது, $AX = AY$; $A \neq 0$; $X \neq Y$ எனக் கிடைக்கிறது.

6.17. அணி இயற்கணிதத்தில் 'நீக்கல் விதி' ஓரளவுக்கு உண்மை யாக உள்ளது. அதாவது, A, B என்பவை சிறப்பில்லாத சதுர அணி களாகட்டும். $AX = AY$ என்றால் $X = Y$ என்ற முடிவு கிடைக் கிறது.

$$AX = AY. \quad \ldots\ldots \text{I}$$

A என்பது, சிறப்பில்லாத அணியாகையால் அதற்கு A^{-1} என்ற எதிர் அணி உண்டு. (I)-ன் இரண்டு பக்கங்களையும் A^{-1} ஆல் முன் பெருக்கல் செய்வோம்.

$$A^{-1}AX = A^{-1}AY$$

ஆதலால் $IX = IY$. ஆதலால் $X = Y$ எனக் கிடைக்கிறது.

6.18. ஒரு சதுர அணி 'பூச்சியத்தின் காரணியாக' இருக்க வேண்டுமானுல் அது 'சிறப்பு அணியாக' இருத்தல் வேண்டும்.

$AX = 0$. இதில் A, சதுர அணியாகவும் $X \neq 0$ என்றும் இருக்கட்டும். A, பூச்சியத்தின் காரணி என்ருல் $A \neq 0$ என இருத்தல் வேண்டும். இப்பொழுது A சிறப்பு அணியாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும். இல்லாவிட்டால், A-க்கு எதிர் அணி A^{-1} உண்டு. இதனுல் முன் பெருக்கல் செய்வோம்.

$$A^{-1}AX = A^{-1}0$$

அல்லது $X = 0$ என ஆகிறது. இது கொள்கைக்கு விரோதமானது. ஆகையால் 'A' ஒரு சிறப்பு அணி.

6.19. அணிகளைப் பிரிவினை செய்தல் (Partitioning of Matrices)

ஓர் அணியில் நிரைகள், நிரல்கள் ஆகியவைகளுக்கு இடையே கோடுகள் வரைந்தால் அணி, கீழ்க்கண்டவாறு பல சிறிய அணிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இதற்கு, அணியைப் பிரிவினை (Partition) செய்தல் என்பது பெயர்.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \hline d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{array}\right]$$

2, 3 நிரைகள், 3, 4 நிரைகள் இவைகளுக்கிடையே கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ள எந்த நிரைகளுக்கிடையேயும், எத்தனை கோடுகள் வேண்டுமானுலும் வரையலாம். இதேபோல, எந்த நிரல்களுக்கிடையேயும், எத்தனை கோடுகள் வேண்டுமானுலும் வரையலாம். மேலே காட்டியுள்ள அணியில் 2, 3 நிரல்கள், 4, 5 நிரல்கள் ஆகியவைகளுக்கிடையே கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. இப்பொழுது A என்ற அணி 9 சிறிய அணிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு சிறிய அணியையும், A-ன் ஒரு பொருளாகக் கருதி A ஐக் கீழ்க்கண்ட விதத்தில் எழுதலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

இதில் $A_{11} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$; $A_{13} = \begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \end{bmatrix}$ போன்றவைகள்.

அணியைப் பிரிவினை செய்யும் முறையை, அணிக் கூட்டலிலும், அணிப் பெருக்கலிலும் பயனுள்ள முறையில் பின்பற்றலாம்.

6.20. முதலில், அணிக்கூட்டலைக் கீழ்க்கண்ட உதாரணத்தின் மூலம் விளக்குவோம். A, B என்ற அணிகள் ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்தவைகளாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]; \quad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A, B என்பவைகளை ஒரேவிதமாகப் பிரிவினை செய்ய வேண்டும். இப்பொழுது

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

என எழுதலாம்.

A_{11}, A_{12}, B_{11}, B_{12} ...... —இவைகளை அணிப் பொருள்களாகக் கருதி, இரண்டு அணிகளின் கூட்டல் விதியை இவைகளுக்குப் பயன்படுத்துவோம்.

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 & 10 & 12 \\ 7 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ என ஆகிறது.

பிரிவினை செய்யாமல் கூட்டினாலும் இதே கூட்டல் பலன் கிடைக்கிறது என்பதைப் பார்க்கலாம். சில உதாரணங்களில், பிரிவினை செய்து கூட்டினால் எளிதாக இருக்கும் எனப் பார்க்கப்பட்டுள்ளது.

6.21. அணிப் பெருக்கலில் பிரிவினை முறையைப் பார்ப்போம். பெருக்கலுக்கு உகந்ததாக உள்ள A, B என்ற இரண்டு அணிகளை எடுப்போம்

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \qquad B=\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

பிரிவினைக் கோடுகள் வரையும்போது 'ஒரு விதி' கவனமாகப் பின்பற்றப்பட வேண்டும். உதாரணமாக A-ல் **3, 4** நிரல்களுக் கிடையே கோடு வரைந்தால், உடனடியாக B-ல் **3, 4** நிரைகளுக் கிடையே கோடு வரைய வேண்டும். இந்த முறை அவசியம் பின்பற்றப் படவேண்டும். இல்லாவிட்டால், பொருள்களைப் பெருக்க முடியாது. இப்பொழுது, A-ல் நிரைகளுக்கிடையே எங்கே வேண்டுமானாலும் கோடு வரையலாம். B-ல், நிரல்களுக்கிடையே எங்கே வேண்டு மானாலும் கோடு வரையலாம். இப்பொழுது,

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$ என ஆகிறது.

இப்பொழுது A_{11}, B_{11} போன்றவைகளைப் பொருள்களாகக் கருதி பெருக்கல் விதியைப் பின்பற்றுவோம்.

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 19 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 21 \\ 17 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 29 & 7 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 29 \\ 14 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 20 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 20 & 11 & 37 \\ 24 & 14 & 37 \\ 30 & 9 & 33 \\ 17 & 11 & 34 \end{bmatrix}$$

இதே பெருக்கல் பலன் A, B ஆகியவைகளை நேரிடையாகப் பெருக்கினாலும் கிடைக்கும் என்பதைச் சரி பார்க்கலாம். சில உதாரணங்களில் பிரிவினை முறை எளிதாக இருக்கும் எனப் பார்க்கப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 6.15.

n வரிசை எண் உடைய, (n-rowed) எல்லாச் 'சிறப்பு இல்லாத' அணிகளும் அணிப் பெருக்கலின் சார்பாக, ஒரு குலமாகின்றன.

நிறுவல் :

A, B ஆகியவைகள் n-வரிசை எண் உள்ள 'சிறப்பில்லாத' அணிகளானதால் (AB)-ம் இதே இனத்தைச் சேர்ந்த ஓர் அணிதான்.

மேலும், $|AB| = |A| \quad |B| \neq 0$. ஆகையால் (AB) ஒரு சிறப்பில்லாத அணி.

அணிப் பெருக்கலில் சேர்ப்பு விதி உண்மையென்று தேற்றம் 6.5.-ல் பார்த்தோம்.

n-வரிசை எண்ணுடைய அலகு அணி I இந்தக் கணத்தின் முற்றொருமைப் பொருள்.

$$A\,I = I\,A = A.$$

சிறப்பு இல்லாத அணிகளானதால், எந்த அணிக்கும் $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ என்று இருக்குமாறு A^{-1} என்ற பிரத்தியேகமான எதிர் அணி உண்டு. ஆகையால் இந்த அணிகள் ஒரு குலமாகின்றன. $AB \neq BA$ என்ற காரணத்தால் இக்குலம் ஓர் ஏபெலியன் குலமல்ல.

தேற்றம் 6.16.

ஒரு குலத்திலுள்ள அணிகள் எல்லாம் 'சிறப்பு இல்லாதனவாகவோ' அல்லது எல்லாம் 'சிறப்பு உள்ளனவாகவோ' இருத்தல் வேண்டும்.

நிறுவல் : ஒரு குலத்திலுள்ள அணிகள் எல்லாம் ஒரே வரிசை எண் உடைய சதுர அணிகளாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும். இதில் A என்ற ஓர் அணியைக் கருதுவோம். இது 'சிறப்பு இல்லாதது' எனக் கொள்வோம். அதாவது $|A| \neq 0$. இக் குலத்தில் X என்ற மற்றோர் அணியை எடுப்போம். இதன் எதிர் அணி X^{-1}. ஆகையால் $X\,X^{-1} = E =$ முற்றொருமை அணி.

$$\begin{aligned} 0 &\neq |A| && \text{கொள்கை} \\ &\neq |E A| \\ &\neq |X X^{-1} A| \\ &\neq |X| \; |X^{-1} A| \end{aligned}$$

ஆகையால் $|X| \neq 0$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால் இதே போல் எந்த அணியும் சிறபபு இல்லாததாக இருத்தல் வேண்டும்.

இப்பொழுது A என்ற ஓர் அணி சிறப்பு உள்ளதாக இருக்கட்டும். மற்ற எந்த அணி X-ம் சிறப்பு உள்ளதாகத்தான் இருக்கும். ஏனெனின், X சிறப்பில்லாத அணியாக இருக்கட்டும். 'X' சிறப்பில்லாத அணியாகையால் வேறு எந்த அணியும் சிறப்பில்லாத அணியாக இருத்தல் வேண்டும் என மேலே பார்த்தோம். ஆனல் இது, A ஒரு

சிறப்புள்ள அணி என்ற நாம் கொண்ட கொள்கைக்கு மாறாக உள்ளது. ஆகையால் எல்லா அணிகளும் சிறப்புள்ள அணிகள் தாம்.

குறிப்பு :- சிறப்புள்ள அணிகளின் குலத்தில் எந்த அணிக்குப் எதிர்ப் பொருள் உண்டு. ஆனால் எதிர் அணி கிடையாது.

மாதிரி 5 : சிறப்புள்ள அணிகளின் குலத்துக்கு ஓர் உதாரணம் கொடுக்கவும்.

$A(x) = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$ இதில் x என்பது பூச்சியத்தைத் தவிர உள்ளதான எந்த எண்ணாகவும் இருக்கலாம்.

$$\left| A\ (x) \right| = \begin{vmatrix} x & x \\ x & x \end{vmatrix} = 0.$$

ஆகையால் $A(x)$ ஒரு 'சிறப்பு அணி'

$A(y) = \begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix}$ என்று எடுப்போம்.

$$A(x)\ A(y) = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{bmatrix}$$

பெருக்கல் பலனும் கணத்தைச் சேர்ந்தது தான்.

$$A(x)\ A(\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} = A(x)$$

இதே போல $A(\frac{1}{2})\ A(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$

$$= A(x)$$

ஆகையால் $A(\frac{1}{2})$ இந்தக் கணத்தின் முற்றொருமைப் பொருள்.

$$A(x)\ A\left(\frac{1}{4x}\right) = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A(\frac{1}{2})$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகையால் எந்தப் பொருள் $A(x)$-க்கும் எதிர்ப் பொருள் $A^{-1}(x) = A\left(\frac{1}{4x}\right)$ என உள்ளது.

ஆகையால் $A(x) = \left\{ \begin{matrix} x & x \\ x & x \end{matrix} \right\}$ என்ற கணம் ஒரு குலமாகிறது.

6.22. செயல் குலங்களுக்கு ஓர் உதாரணம்: வடிவொத்த அணி மாற்றம். (An example of operator Groups: Similarity Transformation.)

A, B என்ற இரண்டு சதுர அணிகள் கீழ்க்கண்டவாறு இணைப்புக் கொண்டால், அவைகள் வடிவொத்த அணிகள் (Similar Matrices) எனப்படுகின்றன.

$B = X^{-1} A X$ (இதில் X, ஒரு சிறப்பில்லாத அணி). மேலும் B, A இலிருந்து வடிவொத்த அணி மாற்றத்தினல் (Similarity Transformation) அடையப் பெறுகிறது. இதில் X-க்கு **மாற்றும் அணி** (**Transforming Matrix**) என்பது பெயர்.

X-ஐ மாற்றும் அணியாகக் கொண்ட வடிவொத்த அணி மாற்றும் செயலை T_x எனக் குறிப்போம். அதாவது,

$T_x(A) = X^{-1} AX$. இவ்வித வடிவொத்த அணி மாற்றும் செயல்களெல்லாம் ஒரு குலமாகின்றன எனக் காண்போம்.

$$T_x(A) = X^{-1} A X; \; T_y(A) = Y^{-1} AY.$$

$$\begin{aligned}(T_x T_y)(A) &= T_x[T_y(A)] \\ &= T_x(Y^{-1} A Y) \\ &= X^{-1}(Y^{-1} A Y) X \\ &= (X^{-1} Y^{-1}) A (Y X) \\ &= (Y X)^{-1} A (Y X) = T_{xy}\end{aligned}$$

ஆகையால் இரண்டு செயல்களின் பெருக்கல் அதே வித அணி மாற்றும் செயலாக உள்ளது.

$$\begin{aligned}(T_x T_y) T_z (A) &= T_x(T_y T_z)(A) \\ &= T_{zyx}(A) \text{ எனக் காண்பிக்கலாம்.}\end{aligned}$$

$$T_x T_I = T_{Ix} = T_x \qquad [\, I \rightarrow \text{அலகு அணி} \,]$$

$$T_I T_x = T_{xI} = T_x$$

ஆகையால் T_I என்பது முற்றொருமைப் பொருள்

மேலும் $T_x T_{x^{-1}} = T_{x^{-1}x} = T_I$

$T_{x^{-1}} T_{xx^{-1}} = T_I$ என உள்ளது. ஆகையால் $T_{x^{-1}}$, T_x-ன் எதிர்ப் பொருள்.

ஆகையால் வடிவொத்த அணி மாற்றங்கள் ஒரு குலமாகின்றன.

6.23. வரிசை எண் 'n' உடைய வரிசை மாற்றங்களின் குலத்தை வரிசை எண் 'n' உடைய சதுர அணிகளால் குறிப்பிடலாம்.
[A group of permutations of degree n can be represented by $n\times n$ Matrices]

n பொருள்களின் வரிசை மாற்றங்களின் குலத்தை G என்க. இதில் ஒரு வரிசை மாற்றம் 'p' கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கட்டும்.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots\ldots & a_n \end{pmatrix}$$

அதாவது $1p = a_1$; $2p = a_2$; $3p = a_3 \ldots\ldots np = a_n$

இந்த வரிசை மாற்றம் 'p' க்குத் தகுந்தாற் போல், கீழ்க்கண்டவாறு வரைவறை செய்யப்பட்ட $N(p)$ என்ற $(n \times n)$ அணியை எடுப்போம் :

$$[N(p)]_{ij} = \begin{cases} 1 \rightarrow (\, j = ip \text{ என்றால்}) \\ 0 \rightarrow (\, j \neq ip \text{ என்றால்}) \end{cases}$$

இதன் படி $N(p)$-ன் முதல் நிரையில் $i = 1$. $1p = a_1$ என்பதால், முதல் நிரையில் 'a_1' வரிசையுள்ள இடத்தில் 1-ம், மற்ற இடங்களில் பூச்சியங்களும் உள்ளன. இதே போல, மற்ற, வரிசை மாற்றங்களுக்கும் தகுந்த அணிகளை எழுதலாம். இந்த அணிகள் G' என்ற ஒரு குலமாவதுடன், G உடன் ஒரே அமைப்புக் கொண்டனவாயும் (Isomorphic) இருக்கும். இதைக் கீழ்க்கண்ட உதாரணத்தில் விளக்குவோம். சமச்சீர்க் குலம் S_3 ஐ எடுப்போம் :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ p_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ p_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ p_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ p_6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ N(p_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N(p_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ N(p_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N(p_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ போன்ற வரிசை மாற்றங்களின், அணிப் பிம்பங்கள் $N(p_1)$, $N(p_2)$, $N(p_3)$ ... போன்றவைகள். இரண்டு கணங்களும் ஒன்றுக்கொன்றுன இணைப்புக் கொண்டவைகள். $p_1, p_2, p_3, \ldots$ போன்றவைகள் ஒரு குலம் (G) ஆகின்றன என்பது தெரியும். $N(p_1), N(p_2)$ ... போன்ற அணிகளும் ஒரு குலம் (G') ஆகின்றன. என்பதை அவைகளின் பெருக்கல் அட்டவணை வரைந்து உணரலாம். G, G' ஆகியவை ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை என்பதற்கு ஓர் உதாரணம் கொடுப்போம்:

$$p_3\ p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = p_2$$

$$N(p_3)\,N(p_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = N(p_2)$$

ஆகையால் $(p_3\,p_5)' = [N(p_3)\,N(p_5)] = p_3'\ p_5'$ எனக் கிடைக்கிறது.

6.24. ஓர் அணியின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு (Characteristic Equation of a Matrix)

$X \quad = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n)^T$ ஒரு வெக்டர் என்போம்.

$A \quad =$ ஒரு (nxn) அணி என்போம்.

$A\,X =$ என்ற பெருக்கல், மற்ருெரு வெக்டர்,

$X' \quad = (x_1', x_2' \ldots\ldots\ldots x_n')$ என்பதைக் கொடுக்கிறது.

அதாவது $X' = A\,X$.

'வீழல் வடிவ கணிதத்தில்' (Projective geometry) ஒரு புள்ளியை ஓர் ஆய வெக்டர் X ஆல் குறிக்கிருேம். ஒரு புள்ளியை மற்ருெரு புள்ளியாக மாற்றும்பொழுது, புதிய புள்ளியின் வெக்டர் X', பழைய புள்ளியின் வெக்டர் X உடன்

$X' = A\,X$ என்று இணைப்புக் கொள்ளும். இவ்விதம் A என்ற அணி, 'X' என்ற புள்ளியை 'X'' என்ற புள்ளியாக மாற்றுகிறது. மேலும், X என்ற வெக்டரும், λX (λ = ஒரு திசையிலி) என்ற வெக்டரும் ஒரே புள்ளியைக் குறிப்பன. A என்ற அணி, புள்ளிகளை மாற்றும்பொழுது சில சிறப்பான புள்ளிகள் (united points) மாருமலே இருந்துவிடுகின்றன. இப்புள்ளிகளின் வெக்டர்களுக்குச் 'சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள்' (Characteristic vectors) என்பது பெயர். இம்மாதிரியான வெக்டர்களைக் கண்டுபிடிப்பது கணிதத்தில் வேறு பல பகுதிகளிலும்

முக்கியமாகக் கருதப்படுகிறது. இம்மாதிரியான வெக்டர்களைக் கொடுக்கும் சமன்பாடு $AX = \lambda X$ ஆகும்.

அல்லது $AX = \lambda I X$

அல்லது $AX - \lambda I X = 0$

அல்லது $(A - \lambda I) X = 0$

இச்சமன்பாட்டுக்கு, பூச்சியமில்லாத தீர்வுகள் இருக்கவேண்டுமானல், $|A - \lambda I| = 0$ என இருந்தல் வேண்டும் என அடுத்த அத்தியாயத்தில் பார்க்கப் போகிறோம். பொதுவாக $|A - \lambda I|$ என்பது λ என்னும் திசையிலியில் n படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. ஆகையால்,

$|A - \lambda I| = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு n தீர்வுகள் உண்டு

$|A - \lambda I| = 0$ என்பதற்கு 'A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு (Characteristic Equation) என்பது பெயர். இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளுக்குச் சிறப்பியல்புத் தீர்வுகள் (Charateristic roots) என்பது பெயர். சிறப்பியல்புத் தீர்வுகளுக்குத் தகுந்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் (Characteristic vectors) உண்டு.

சிறப்பியல்புத் தீர்வுகளுக்கு (Characteristic roots) "ஐஜன் மதிப்புகள்" (Eigen values) என்றும், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களுக்கு (Characteristic vectors) "ஐஜன் வெக்டர்கள்" (Eigen Vectors) என்றும் பெயர்கள் உண்டு.

மாதிரி 6 : கீழ்க்கண்ட A என்ற அணியின் சிறப்பியல்புத் தீர்வுகளையும், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையம் கண்டுபிடிக்கவும் :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -7 & 3 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$|A - \lambda I| = 0$ என ஆகிறது.

அதாவது, $$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -7 & 3 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda^3 - 13\lambda + 12 = 0.$ இதன் தீர்வுகள் $\lambda = 1, 3, -4.$

ஆகையால் சிறப்பியல்புத் தீர்வுகள் அல்லது ஐஜன் மதிப்புகள் $\lambda = 1, 3, -4$ ஆகும்.

$(A - \lambda I)X = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுப்போம்.

இது, $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -7 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

என ஆகிறது.

அல்லது
$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 2x_2 - (3+\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots I$$

$\lambda = 1$ என்க.

(I) என்ற சமன்பாடுகள்
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$
என ஆகின்றன.

$x_2 = 1$ என்க.

$x_1 = -2$

$x_3 = 4$ எனக் கிடைக்கின்றன.

ஆகையால், $\lambda = 1$ என்ற தீர்வுக்குத் தகுந்த சிறப்பியல்பு

வெக்டர் $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ என ஆகிறது.

$\lambda = 3$ என்க.

சமன்பாடுகள்
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_2 = 1$ என்க; $x_1 = 2$ என்றும், $x_3 = -2$ என்றும் கிடைக்கின்றன.

ஆகையால், $\lambda = 3$ என்ற தீர்வுக்குத் தகுந்த சிறப்பியல்பு

வெக்டர் $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ என ஆகிறது.

இதே போல $\lambda = -4$ என்ற தீர்வுக்குத் தகுந்த வெக்டர் $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix}$ எனப் பார்க்கலாம்.

6.25. அணி பல்லுறுப்புக் கோவை (Matric polynomial)

$$F(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \ldots\ldots + A_n\lambda^n$$

என்ற கோவையில் $A_0, A_1, \ldots\ldots, A_n$ என்பவைகள் ஒரே வரிசை எண் உடைய சதுர அணிகளாகவும் λ, ஒரு திசையிலி எண்ணுகவும் இருந்தால், இந்தக் கோவைக்கு n படியுள்ள அணி பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது பெயர். இதனுல் $A - I\lambda$ என்பது ஒருபடியுள்ள அணி பல்லுறுப்புக் கோவையாகிறது. ஓர் அணி கீழ்க்கண்ட விதம் அமைந்திருந்தால் அதை ஓர் அணி பல்லுறுப்புக் கோவையாக எழுதலாம்.

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1x & a_2 + b_2x \\ a_3 + b_3x & a_4 + b_4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} x$$

$$= A + Bx. \qquad \text{———}(I)$$

$(A - \lambda I)^{\oplus}$ என்ற அடுத்திரு அணியைக் கருதுவோம். இதன் பொருள்கள் $|A - \lambda I|$-ன் பொருள்களின் துணைக் காரணிகள். இத் துணைக் காரணிகள் λ-ல் $(n-1)$ படியுள்ள எண் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும். ஆகையால் $(A-\lambda I)^{\oplus}$ என்ற அணியை (I) - ல் உள்ளபடி $(n-1)$ படியுள்ள அணி பல்லுறுப்புக் கோவையாக எழுதலாம். அதாவது,

$$(A-\lambda I)^{\oplus} = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

மேலும், எண் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் உள்ளது போல, இரண்டு அணி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் சமமானுல், இரண்டிலும் λ-ன் ஒரே படிகளின் குணகங்கள் சமமானவை.

தேற்றம் 6.17. (கேலீ - ஹாமில்டன் தேற்றம்) (Cayley - Hamilton theorem)

எந்தச் சதுர அணியும் தனது சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் தீர்வாக உள்ளது. (Every matrix satisfies its characteristic equation.)

A என்ற சதுர அணியை எடுப்போம். இதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$ என ஆகிறது.

அதாவது $|A - \lambda I| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots\ldots + a_n\lambda^n$.

$$AA^{\otimes} = |A| I$$ என்ற முடிவைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$(A-\lambda I)(A-\lambda I)^{\otimes} = |A-\lambda I|\ I$$
$$= a_0 I + a_1\lambda I + a_2\lambda^2 I + \ldots\ldots + a_n\lambda^n I$$

$(A-\lambda I)^{\otimes} = B_0 + B_1\lambda + \ldots\ldots + B_{n-1}\lambda^{n-1}$ என்க.

$$(A-\lambda I)(B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \ldots\ldots + B_{n-1}\lambda^{n-1})$$
$$= a_0 I + a_1\lambda I + \ldots\ldots + a_n\lambda^n I$$

இரண்டு பக்கங்களிலும், λ-ன் ஒரே படியுள்ள குணகங்களைச் சமமாக்குவோம்.

$$AB_0 = a_0 I$$
$$AB_1 - B_0 = a_1 I$$
$$AB_2 - B_1 = a_2 I$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-B_{n-1} = a_n I$$

இம்முடிவுகளை, முறையே $I, A, A^2, \ldots, A^n$ என்பவைகளால் முன் பெருக்கல் செய்து கூட்டினுல்,

$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots\ldots + a_n A^n = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால், A, தனது சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகிறது.

மாதிரி 7: கீழ்க்கண்ட A என்ற அணியில் ' கேலீ-ஹாமில்டன் ' தேற்றத்தைச் சரி பார்க்கவும். அதன் மூலம் A^{-1} என்ற எதிர் அணியைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

அல்லது $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0.$

அல்லது $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0.$ ... —(1)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 . A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

இவைகளை (1)-ல் பிரதியீடு செய்வோம்.

$$\begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆதலால் 'கேலீ-ஹாமில்டன்' தேற்றம் A-க்கு உண்மையாகிறது.

இப்பொழுது,

$$A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$$

அல்லது $A^3 - 6A^2 + 9A = 4I$

இரண்டு பக்கங்களையும் A^{-1} ஆல் பின் பெருக்கல் செய்வோம்.

$$A^3A^{-1} - 6A^2A^{-1} + 9AA^{-1} = 4IA^{-1}$$

அல்லது $A^2 - 6A + 9I = 4A^{-1}$

அல்லது $A^{-1} = \frac{1}{4} A^2 - \frac{3}{2} A + \frac{9}{4} I$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{9}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ என ஆகிறது.

6.25. செங்குத்து அணிகள் (Orthogonal Matrices), மற்றும் கலப்பெண் செங்குத்து அணிகள் (Unitary Matrices)

வரையறை : ஒரு மெய்யெண் சதுர அணி A,

$A^T A = I$ என இருந்தால் A, ஒரு செங்குத்து அணி (Orthogonal Matrix) எனப்படுகிறது.

ஒரு கலப்பெண் சதுர அணி U,

$\overline{U}^{T} U = I$ என இருந்தால், U ஒரு கலப்பெண் செங்குத்து அணி (Unitary Matrix) எனப்படுகிறது.

6.26. செங்குத்து அணியின் சில தன்மைகளைப் பார்ப்போம் :

(1) $A^{T} A = I$ என்பதால், உடனே $A^{T} = A^{-1}$ என ஆகிறது.

(2) $A A^{T} = I$ என்பதும் உண்மை.

(3) $A^{T} A = I$

அல்லது $(A^{T} A)_{ij} = (I)_{ij} = \delta_{ij}$

அல்லது $\sum_{k} b_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$

அல்லது $\sum_{k} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$ $\left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0, \ i \neq j \\ \delta_{ij} = 1, \ i = j. \end{array} \right.$

$= 0, \ i \neq j$ என்றால்.

ஆகையால், A-ல் 'i' வரிசையுள்ள நிரல், 'j' வரிசையுள்ள நிரல் ஆகியவைகளின் உட்பெருக்கு 0 என ஆகிறது. ஆகையால் எந்த இரண்டு வெவ்வேறு நிரல் வெக்டர்களின் உட்பெருக்கும் பூச்சியமென ஆகிறது. அதாவது எந்த இரண்டு நிரல் வெக்டர்களும் செங்குத்தாகின்றன (orthogonal). இதே போல எந்த இரண்டு நிரைகளின் உட்பெருக்கும் 0 என ஆகிறது. ஆகையால், இந்த அணிக்குச் செங்குத்து அணி என்பது பெயர். மேலும் $i = j$ என்னுமிடத்தில் $\delta_{ij} = 1$, என்பதால், A-ன் ஒரு நிரையை (அல்லது நிரலை) எடுத்து, அதனுடனேயே உட்பெருக்குச் செய்தால் பெருக்கல் பலன் 1 ஆக இருத்தல் வேண்டும். ஆகையால் அந்த நிரை (அல்லது நிரல்) வெக்டரின் நீளம் 1 ஆக இருத்தல் வேண்டும். ஆகையால் A-ன் நிரை (அல்லது நிரல்) வெக்டர்கள் அலகு வெக்டர்களாக உள்ளன.

(4) $A^{T} A = I$

$|A^{T}| \, |A| = |I|$

அல்லது $|A| \, |A| = 1$

அல்லது $|A|^{2} = 1$

அல்லது $|A| = \pm 1$

செங்குத்து அணிக்கு ஓர் உதாரணம்

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

கலப்பெண் செங்குத்து அணிக்கு ஓர் உதாரணம் :

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$$

இதிலும் எந்த இரண்டு நிரை வெக்டர்களும் செங்குத்துகள் ; எந்த இரண்டு நிரல் வெக்டர்களும் செங்குத்துகள்.

மாதிரி 8 : செங்குத்து அணியில் ஒரு முக்கியமான பயனைப் பார்ப்போம்.

'A' $= (a_{rs})$ ஒரு செங்குத்து அணி என்றால், கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots\dots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots\dots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots\dots + a_{nn} x_n = b_n$$

இவைகளை $AX = B$ என எழுதலாம்.

ஆதலால், $X = A^{-1} B$ என ஆகிறது.

$$= A^{T} B$$

ஆகையால் தீர்வுகளை உடனடியாக எழுதுவோம் :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots\dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots\dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots\dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ஆகையால் $x_1 = a_{11} b_1 + a_{21} b_2 + \dots\dots + a_{n1} b_n$

$$x_2 = a_{12} b_1 + a_{22} b_2 + \dots\dots + a_{n2} b_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = a_{1n} b_1 + a_{2n} b_2 + \dots\dots + a_{nn} b_n$$

மாதிரி 9 : ஓர் அணி அதே வரிசை எண் உடைய எந்த அணியுடனும் பரிமாற்றம் கொண்டால் (Commutative) அது ஒரு திசையிலி அணி எனக் காண்பிக்கவும்.

$A = (n \times n)$ அணி (a_{ij}) என்க.

$B = (n \times n)$ மூலைவிட்ட அணி

$dg\ (b_{11}\ b_{22}\ \ldots\ldots\ b_{nn})$ என்க.

இதில் $b_{ii} \neq b_{jj}$

$AB = BA$ ...... கொள்கை.

$(AB)_{ij} = (BA)_{ij}$

அல்லது $\sum\limits_{k} a_{ik}\ b_{kj} = \sum\limits_{k} b_{ik}\ a_{kj}$

அல்லது $a_{ij}\ b_{jj} = b_{ii}\ a_{ij}$

அல்லது $a_{ij}\ (b_{jj} - b_{ii}) = 0$

$i \neq j;\ \ b_{jj} \neq b_{ii}$ ஆகையால் $a_{ij} = 0$

ஆகையால் A ஒரு மூலைவிட்ட அணி

$= dg\ (a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ldots\ldots\ a_{nn})$

இப்பொழுது $B = (n \times n)$ அணி (b_{ij}) என்க.

$AB = BA$ ...... கொள்கை.

ஆதலால் $(AB)_{ij} = (BA)_{ij}$

அல்லது $\sum\limits_{k} a_{ik}\ b_{kj} = \sum\limits_{k} b_{ik}\ a_{kj}$

அல்லது $a_{ii}\ b_{ij} = b_{ij}\ a_{jj}$

அல்லது $a_{ii}\ b_{ij} = b_{ij}\ a_{jj}$

அல்லது $b_{ij}\ (a_{ii} - a_{jj}) = 0$

$b_{ij} \neq 0.$ ஆகையால் $a_{ii} = a_{jj}$

ஆகையால் A ஒரு திசையிலி அணி.

மாதிரி 10 : A ஒரு சமச்சீர் அணியாக இருந்தால் எந்த அணி $B^T AB$—ம் சமச்சீர் அணி என நிறுவுக.

A ஒரு சமச்சீர் அணி. ஆகையால்,

$$A^{T} = A$$

$$\left(B^{T} AB\right)^{T} = B^{T} A^{T} \left(B^{T}\right)^{T}$$

$$= \left(B^{T} AB\right)$$

ஆகையால் $\left(B^{T} AB\right)$-ம் ஒரு சமச்சீர் அணி.

மாதிரி 11 : எந்த ஒரு சதுர அணியையும், ஒரு சமச்சீர் அணி, ஒரு சரிந்த சமச்சீர் அணி ஆகியவைகளின் கூட்டலாக எழுத முடியும் எனக் காட்டவும்.

உதாரணமாக $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ என்க.

$$A^{T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A + A^{T} = \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2+b_1 & a_3+c_1 \\ a_2+b_1 & 2b_2 & b_3+c_2 \\ c_1+a_3 & c_2+b_3 & 2c_3 \end{bmatrix}$$

இது ஒரு சமச்சீர் அணி என்பதைக் காணலாம்.

$$A - A^{T} = \begin{bmatrix} 0 & b_1-a_2 & c_1-a_3 \\ a_2-b_1 & 0 & c_2-b_3 \\ a_3-c_1 & b_3-c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

இது ஒரு சரிந்த சமச்சீர் அணி என்பதைக் காணலாம்.

$$A = \tfrac{1}{2}\left(A + A^{T}\right) + \tfrac{1}{2}\left(A - A^{T}\right)$$

ஆகையால் A = (ஒரு சமச்சீர் அணி) + (ஒரு சரிந்த சமச்சீர் அணி)

மாதிரி 12 :

$A = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ஒரு சரிந்த ஹெர்மீஷியன் அணி எனக் காட்டவும்.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -i & 1-i & 2+3i \\ -1-i & -2i & 1 \\ -2+3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^T = \begin{bmatrix} -i & -1-i & -2+3i \\ 1-i & -2i & -1 \\ 2+3i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -A$$

ஆகையால் A, ஒரு சரிந்த ஹெர்மீஷியன் அணி என ஆகிறது.

மாதிரி 13 : கீழ்க்கண்ட அணி ஒரு செங்குத்து அணி என நிறுவுக

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$A^T A = I$ என நிறுவினால் போதுமானது.

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

ஆகையால் A ஒரு செங்குத்து அணி.

மாதிரி 14 : A, B, C என்ற சிறப்பில்லாத உள் அணிகளை உடைய கீழ்க்கண்ட பிரிவினை செய்யப்பட்ட அணியின் எதிர் அணியைக் கண்டு பிடிக்கவும்: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & O \end{bmatrix}$

எதிர் அணி $\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ என்க.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = I$$

அல்லது, $\begin{bmatrix} AP + BR & AQ + BS \\ CP & CQ \end{bmatrix} = I$

ஆதலால் $AP + BR = I; \quad AQ + BS = O$

$CP = O \qquad CQ = I$

$CP = 0$; ஆனால் $C \neq 0$; மேலும் C சிறப்பில்லாத அணி

ஆகையால் $P = 0$

$CQ = I$ ஆதலால் $Q = C^{-1}$

$BR = I$ ஆதலால் $R = B^{-1}$

$AC^{-1} + BS = 0$ ஆதலால் $BS = -AC^{-1}$

அல்லது $S = -B^{-1}AC^{-1}$

ஆதலால் எதிர் அணி $= \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$

பயிற்சி

1) A, B, ஆகியவைகள் கழிக்கத்தக்க அணிகளானால்,

$(A - B)^T = A^T - B^T$ எனக் காட்டவும்.

2) A, B ஆகியவைகள் சமச்சீர் அல்லது சரிந்த சமச்சீர், அல்லது ஹெர்மீஷியன் அல்லது சரிந்த ஹெர்மீஷியன் அணிகளானால் $A + B$-ம் முறையே அதே இனங்களைச் சேர்ந்தது எனக் காண்பிக்கவும்.

3) A, ஒரு சரிந்த சமச்சீர் அணியானால் $A^T = -A$ என நிறுவுக.

4) கீழ்க்கண்ட A, B என்ற அணிகளின் (AB) (BA) என்ற பெருக்கல் பலன்கள் காண்க.

(1) $\quad = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

(5) $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

5) தொடர்ப் பெருக்கல் காண் :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6) ஒரு சதுர அணி A ஐ ஒரு மூலைவிட்ட அணி D யினுல் முன்பெருக்கல் (பின்பெருக்கல்) செய்தால் A-ன் நிரைகளை (நிரல்களை) அவைகளுக்கு ஒத்த D-ன் பொருள்களால் பெருக்குவதற்கு ஒப்பாகும்.

7) இரண்டு மேல் முக்கோண (கீழ் முக்கோண) அணிகளின் பெருக்கல் பலன் ஒரு மேல் முக்கோண (கீழ் முக்கோண) அணி எனக் காட்டவும்.

8) AB, $A + B$ ஆகிய இரண்டும் இருக்கக் கூடியதாக உள்ள A, B என்ற அணிகள் ஒரே விதமான சதுர அணிகளாக இருத்தல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

9) ஓர் அணி A ஐ ஒரு திசையிலி அணியால் முன்பாகவோ அல்லது பின்பாகவோ பெருக்கினுல் A ஐ அந்தத் திசையிலி அணியின் பொருளால் பெருக்குவதற்கு ஒப்பாகும் எனக் காட்டவும்.

10) $(n \times n)$ அணி A-ன் எல்லாப் பொருள்களும் 'a' ஆனுல் A^k ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

11) $P = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ என்ருல்

$$P \otimes = \begin{pmatrix} -bc & -ca & -ab \\ b+c & c+a & a+b \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-c & 0 & 0 \\ 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

என நிறுவுக.

12) $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ என்ருல் $A(\theta)\ A(\theta') = A(\theta + \theta')$ என நிறுவுக. இதற்கு ஒரு வடிவ கணித விளக்கம் தருக.

மேலும் $[A(\theta)]^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ என நிறுவுக.

13) கீழ்க்கண்ட அணிகளின் எதிர் அணி (A^{-1}) காண்க:

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{bmatrix}$; இதில் w, ஒன்றின் ஒரு முப்படி மூலம்.

14) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ என்ருல்,

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ என்பதைச் சரி பார்க்கவும்.

15) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளை, அணி முறையால் தீர்க்கவும்:

(1)
$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ 3x - y - z &= 2 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 8 \\ 2x - y + 4z &= 17 \\ 3x + 4y + z &= 22 \end{aligned}$$

16) B, A உடன் பரிமாற்றம் கொண்டால் (Commutes), B, A-ல் எந்த பல்லுறுப்புக் கோவையுடனும் பரிமாற்றம் கொள்ளும் என நிறுவுக.

17) கீழ்க்கண்ட அணிகளின் சிறப்பியல்புத் தீர்வுகளையும், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

(1) $\begin{bmatrix} 9 & -1 & 9 \\ 3 & -1 & 3 \\ -7 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 10 & 2 & -2 \\ 8 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

18) கீழே கண்ட அணிகளில் 'கேலீ-ஹாமில்டன்' தேற்றம் உண்மையெனப் பார்க்கவும். மேலும், இதன் மூலம் அணிகளின் எதிர் அணிகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

19) A, B, சமச்சீர் அணிகளானால், $AB = BA$ என இருந்தால் தான் (AB)-ம் ஒரு சமச்சீர் அணியாகும் என நிறுவுக.

20) ஒரு சரிந்த சமச்சீர் அணியின் வர்க்கம் ஒரு சமச்சீர் அணி எனக் காட்டவும்.

21) $(AB)_{i\otimes} = A_{i\otimes} B$ என நிறுவுக.

[$i\otimes$ என்றால் 'i' வரிசையுள்ள நிரை]

22) $(AB)_{\otimes j} = AB_{\otimes j}$ என நிறுவுக.

[$\otimes j$ என்றால் 'j' வரிசையுள்ள நிரல்]

23) $(ABC)_{ij} = A_{i\otimes} (BC)_{\otimes j}$

$= A_{i\otimes} BC_{\otimes j}$ என நிறுவுக.

7. அணிகளின் தரமும் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளும்

(Rank of Matrices and Linear Equations)

7.1. அணியின் சிற்றணியும், அதன் கோவையும்

A, ஒரு $(m \times n)$ அணி என்க. இந்த அணியின் எந்த k நிரைகளும், எந்த l நிரல்களும் ஒரு $(k \times l)$ சிற்றணியை (Sub Matrix) உருவாக்குகின்றன.

இச்சிற்றணி ஒரு $(k \times k)$ சதுர அணியாக இருந்தால், அதன் அணிக் கோவைக்கு, k வரிசை எண் உடைய சிற்றணிக் கோவை (Minor of order k or k-rowed minor) என்பது பெயர்.

7.2. அணியின் தரம் (Rank of a Matrix)

A என்ற ஓர் அணியில் பூச்சியமில்லாத மீப்பெரு வரிசையெண் உடைய சிற்றணிக் கோவையின் வரிசை எண்ணுக்கு, A-ன் தரம் R (A) என்பது பெயர். (The rank of a matrix A is the order of the biggest non-vanishing minor of A)

A-ன் பூச்சியமல்லாத மீப்பெரு வரிசை எண் உடைய ஒரு சிற்றணிக் கோவைக்கு A-ன் ஒரு 'விளிம்பு சிற்றணிக் கோவை' (A critical minor of A) என்பது பெயர்.

தரத்தின் வரையறையிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் தொடருகின்றன.

(1) ஓர் அணி A-ன் தரம் 'r' என்றால் $(r + 1)$ வரிசை எண் உடைய A-ன் எந்த சிற்றணிக் கோவையும் பூச்சியமாகிறது.

(2) பூச்சியமல்லாத, 'r' வரிசை எண் கொண்ட சிற்றணிக் கோவை ஒன்றாவது A-ல் இருத்தல் வேண்டும்.

(3) 'n' வரிசையெண் உடைய ஒரு சதுர அணியின் தரம் r என்றால், $r \leq n$ என இருத்தல் வேண்டும்.

(4) $(m \times n)$ அணி A-ன் தரம் 'r' என்றால் $r \leq$ minimum (m,n) என இருத்தல் வேண்டும்.

[min. (m,n) என்றால், m, n ஆகியவைகளில் சிறிய எண் என்பது பொருள்.]

(5) ஒரு பூச்சிய அணியின் தரம் பூச்சியமாகத் தான் இருத்தல் வேண்டும்.

(6) n-வரிசை எண் கொண்ட ஒரு சிறப்பில்லாத அணியின் தரம் 'n'.

(7) n-வரிசை எண்ணுடைய ஒரு சிறப்பு அணியின் தரம் r என்றால் $r < n$ என இருக்கும்.

உதாரணம் :

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

$|A| = 2 \neq 0$. ஆகையால் பூச்சியமல்லாத மீப்பெரு சிற்றணிக் கோவை $|A|$ தான். ஆகையால் $R(A) = 3$

(2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

இதில், $|A| = 0$. ஆனால், $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

பூச்சியமல்லாத வரிசையெண் 2 உள்ள சிற்றணிக் கோவை ஒன்றாவது உள்ளது. ஆகையால் $R(A) = 2$.

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$ என்க.

$|A| = 0$; வரிசை எண் இரண்டு உடைய எந்த சிற்றணிக் கோவையும் பூச்சியமாக உள்ளது. பூச்சியமல்லாத தனிப் பொருள் உள்ளபடியால் $R(A) = 1$.

(4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்க.

$|A| = 0$; வரிசை எண் இரண்டுடைய எந்த சிற்றணிக் கோவையும் பூச்சியமாக உள்ளது. பூச்சியமல்லாத தனிப் பொருள் ஒன்றும் இல்லையாதலால் $R(A) = 0$ என ஆகிறது.

7.3. ஓர் அணியின் தரத்தைக் கண்டுபிடிக்க அதிலுள்ள எல்லாச் சிற்றணிக் கோவைகளையும் கண்டுபிடிக்க நேரிடும். சில சமயங்களில் இது மிகவும் தொல்லையுள்ளதாக இருக்கும். ஓர் அணியின் தரத்தைக் கண்டு பிடிக்க '**அணியில் எளிய செயல்கள்**' (**Elementary operations on a Matrix**) என்ற ஒரு சுலபமான முறை உள்ளது. இம்முறையை விவரிப்போம்;

எளிய செயல்கள் (Elementary operations) கீழ்க்கண்ட மூன்று வகைகளைச் சேர்ந்தவை :

(1) எந்த இரண்டு நிரைகளையும் (அல்லது நிரல்களையும்) பரிமாற்றம் செய்தல் (**Transposition of any two rows or columns**).

(2) ஒரு நிரையை (அல்லது நிரலை) பூச்சியமல்லாத ஒரு திசையிலி எண்ணால் பெருக்கல் (Multiplication of a row or column by a non zero scalar).

(3) ஒரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) மடங்கை மற்றொரு நிரையுடன் (அல்லது நிரலுடன்) கூட்டுதல் (Addition of a multiple of one row or column to another row or column). நிரைகளில் மாத்திரம் செயல்கள் செய்தால், இச்செயல்களுக்கு '**எளிய நிரைச் செயல்கள்**' (Elementary row operations) என்றும், நிரல்களில் மாத்திரம் செயல்கள் செய்தால், இவைகளுக்கு '**எளிய நிரல் செயல்கள்**' (Elementary column operations) என்றும் பெயர்.

7.4. ஓர் அலகு அணியில் எந்த ஓர் எளிய செயல் செய்தாலும் கிடைக்கும் அணிக்கு ஓர் எளிய அணி (Elementary Matrix or E-Matrix) என்பது பெயர். இவ்விதம் எந்த எளிய செயலுக்கும் தகுந்த எளிய அணி உண்டு.

7.5. ஒரு துணைக் கோட்பாடு (Lemma)

A, B, C என்ற அணிகள், $C = AB$ என இருக்கட்டும். A என்ற முன் காரணியில் எந்த ஓர் எளிய நிரைச் செயல் செய்தாலும் C-யிலும் இதே எளிய நிரைச் செயல் செய்யப்பட்டுவிடுகிறது. இதேபோல,

B என்ற பின் காரணியில் எந்த ஓர் எளிய நிரல் செயலைச் செய்தலும், இதே எளிய நிரல் செயல் C-ல் செய்யப்பட்டு விடுகிறது.

நிறுவல்: $R_1, R_2, \ldots\ldots, R_m$ ஆகியவை A-ன் நிரைகளாகவும், $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ ஆகியவை B-ன் நிரல்களாகவும் இருக்கட்டும்.

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}; \quad B = [\, C_1, C_2 \ldots \ldots C_n \,]$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 & \ldots\ldots\ldots & R_1 C_n \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 & \ldots\ldots\ldots & R_2 C_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_m C_1 & R_m C_2 & \ldots\ldots & R_m C_n \end{bmatrix}$$

A-ன் நிரைகள் $R_1, R_2, \ldots, R_m$ ஆகியவைகளில் எந்த எளிய செயல் செய்தாலும் C-ல் அதே எளிய செயலின் பிரதிபலித்தலைப் பார்க்கலாம்.

இதேபோல, B-ன் நிரல்கள் $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ஆகியவைகளில் எந்த எளிய செயல் செய்தாலும், C-ல் அதே எளிய செயலின் பிரதிபலித்தலைப் பார்க்கலாம்.

தேற்றம் 7.1.

A என்ற அணியில் எந்த எளிய நிரைச் செயல் (அல்லது எளிய நிரல் செயல்) செய்தாலும், அது A ஐத் தகுந்த எளிய அணியால் முன் பெருக்கல் (அல்லது பின் பெருக்கல்) செய்வதற்குச் சமம். (Any row or column E-operation on a Matrix A is equivalent to pre or post multiplication of A by its corresponding E-Matrix).

$A = IA$. [I = அலகு அணி]

7.5-ல் உள்ள கோட்பாட்டின்படி, A-ல் எந்த எளிய நிரைச் செயல் செய்தாலும், அது, I-ல் அதே செயல் செய்து, அதாவது, தகுந்த எளிய அணியை உருவாக்கி, A ஐ முன் பெருக்கல் செய்வதற்குச் சமமாகிறது.

மறுபடியும், $A = AI$.

A-ல் எந்த எளிய நிரல் செயல் செய்தாலும், அது I-ல் அதே செயல் செய்து, அதாவது தகுந்த எளிய அணியை உருவாக்கிப் பின் பெருக்கல் செய்வதற்குச் சமமாகிறது.

தேற்றம் 7.2.

ஓர் அணியில் எளிய செயல்கள் புரிவதால் அதன் தரம் மாறுவதில்லை. **(The rank of a Matrix is invariant under elementary operations.)**

நிறுவல் : ஓர் அணி A-ன் தரம் 'r' என்க. ஆகையால், பூச்சியமல்லாத மீப்பெரு சிற்றணிக் கோவை 'D'-ன் வரிசை எண் 'r' ஆகிறது. இந்தச் சிற்றணிக் கோவையில் r நிரைகளும், r நிரல்களும் உள்ளன.

(1) முதல் எளிய செயலை எடுப்போம் : இரண்டு நிரைகளை (அல்லது நிரல்களை)ப் பரிமாற்றம் செய்கிறோம். இதனால் 'D' என்ற ஒரு விளிம்பு சிற்றணிக் கோவையின் நிரைகள் (நிரல்கள்) எப்படி இடம் மாறினாலும், அவைகளை மாத்திரம் எடுத்து 'D' ஐ மறுபடியும் உருவாக்கலாம். ஆதலால் இதன் எண் அளவு மாறுவதில்லை. ஆகையால் 'A'-ன் தரம் மாறுவதில்லை.

(2) இரண்டாவது எளிய செயலை எடுப்போம். ஒரு நிரையை (அல்லது நிரலை)ப் பூச்சியமல்லாத ஒரு திசையிலியால் பெருக்குகிறோம். இதனால் 'D' என்ற ஒரு விளிம்பு சிற்றணிக் கோவை அந்தத் திசையிலியினால் பெருக்கப்படுகிறது. இச் செயலினால் 'D' மாறுவதில்லை; அல்லது திசையிலியினால் பெருக்கப்படுகிறது. ஆகையால், A-ன் தரம் மாறுவதில்லை.

(3) ஒரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) மடங்கை மற்றொரு நிரையுடன் (அல்லது நிரலுடன்) கூட்டுகிறோம். இவ்விதம் செய்வதால், A, B என்ற அணியாக மாறுகிறது என்க. A-ன் தரம் 'r' ஆனதால், A-ல் ஒ. ப. சா. இல்லாத நிரைகளின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை 'r' என ஒரு தேற்றம் உளது. (தேற்றம் 7.5.) இப்பொழுது B-ன் நிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) A-ன் நிரைகள் (அல்லது நிரல்களின்) ஒருபடித்தான சேர்க்கைகளாக இருக்கும். ஆகையால், B யிலுள்ள, ஒ. ப. சா. இல்லாத நிரைகளின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை, A யிலுள்ள ஒ. ப. சா. இல்லாத நிரைகளின் மீப்பெரு எண்ணிக்கையை விட அதிகமாக இருக்க முடியாது.

ஆகையால் $R(B) \leq R(A)$

B-ல் இதே மாதிரியான தகுந்த எளிய செயல்களைச் செய்து A ஐ அடைந்துவிட முடியும்.

ஆகையால், $R(A) \leq R(B)$

ஆகையால் $R(B) = R(A)$ என ஆகிறது.

ஆகையால், ஓர் அணியில், எளிய செயல்களால், அதன் தரம் மாறுவதில்லை.

கிளைத் தேற்றம்: எந்த ஓர் எளிய அணியும் சிறப்பில்லாத அணியாகும் (Every E-Matrix is non singular).

நிறுவல்: எந்த எளிய அணியும், அலகு அணியில் செய்யப்படும் எளிய செயலால் உருவாக்கப்படுகிறது. அலகு அணி ஒரு சிறப்பில்லாத அணி. எளிய செயலால் அதன் தரம் மாறுவதில்லை. ஆகையால் எந்த எளிய அணியும் சிறப்பில்லாதது.

தேற்றம் 7.3.

எந்த எளிய அணியின் எதிர் அணியும் ஓர் எளிய அணி.

E ஓர் எளிய அணி என்க. E-ன் மேல் Φ என்ற எளிய நிரைச் செயல் செய்தால் I கிடைப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது, $\Phi(E) = I$

$\Phi(I) = E'$ என்க. E' ஓர் எளிய அணி.

$E' E = \Phi(I) E = \Phi(E) = I.$

ஆகையால், E', E-ன் எதிர் அணி. அதுவும் ஓர் எளிய அணி.

7.6. A என்ற எந்த $(m \times n)$ அணியையும் கீழ்க்கண்ட இயல்பான உருவத்துக்கு (Normal form) எளிய செயல்களின் தொடரால், மாற்ற முடியும்.

$$N_r^{(m,n)} = \begin{bmatrix} I_r & 0_r^{n-r} \\ 0_{m-r}^{r} & 0_{m-r}^{n-r} \end{bmatrix}$$

இதில் I_r என்பது, r வரிசை எண் கொண்ட அலகு அணி. மற்றவைகள் பூச்சிய அணிகள். இந்த அணியின் தரம் r என்பது உடனடியாக உணரப்படுகிறது. இந்த அணி கொடுக்கப்பட்ட அணியிலிருந்து எளிய செயல்கள் மூலம் அடையப்படுவதால், கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கும் தரம் 'r' என்பது புலனாகிறது. ஆகையால் எந்த அணி A-ன் தரத்தையும் இந்த முறையில் சுலபமாகக் கண்டு பிடிக்கலாம். இந்த முறையைக் கீழ்க்கண்ட உதாரணத்தில் பார்ப்போம்;

['$\sim$' என்ற குறி தரச் சமத்துவத்தைக் குறிக்கும்.]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & -10 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரல் $(1) \leftrightarrow$ நிரல் (4)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -10 & 5 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

நிரை $(2) - 3 \times$ நிரை (1)
நிரை $(3) + 2 \times$ நிரை (1)
நிரை $(4) -$ நிரை (1) $\sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

நிரல் $(2) - 3 \times$ நிரல் (1)
நிரல் $(3) + 3 \times$ நிரல் (1) $\sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

நிரல் $(2) \leftrightarrow$ நிரல் (3) $\sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$(-1) \times$ நிரை (2) $\sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{நிரை }(3) + \text{நிரை }(2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{நிரல் }(4) + 5 \times \text{நிரல் }(2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{6} \times \text{நிரை }(3) \\ \frac{1}{2} \times \text{நிரை }(4) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{நிரை }(4) + \text{நிரை }(3) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{நிரல் }(4) + \text{நிரல் }(3) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} I_3 & 0^1_3 \\ 0^2_1 & 0^1_1 \end{bmatrix} \sim N_3^{(4\times 4)}$$

இது A-ன் இயல்பான உருவம் (Normal Form). இதிலிருந்து A-ன் தரம் 3 என உடனடியாக அறிகிறோம்.

7.7. A என்ற எந்த அணியையும், எளிய செயல்கள் மூலம், இயல்பான உருவத்துக்கு மாற்றலாம் எனப் பார்த்தோம். எளிய செயல்கள், அணியைத் தகுந்த எளிய அணிகளால் முன் அல்லது பின் பெருக்குவதற்குச் சமம் எனவும் பார்த்தோம். (தே. 7.1). எளிய அணிகள் சிறப்பில்லாதவை. எந்த இரண்டு சிறப்பில்லாத அணிகளைப் பெருக்கினாலும், சிறப்பில்லாத அணிதான் கிடைக்கும். [ஏனெனில், $|A|, |B| \neq 0$ என்றால், $|AB| = |A|\ |B| \neq 0$ என ஆகிறது.] ஆகையால், A என்ற ஒரு கொடுக்கப்பட்ட அணிக்குத் தகுந்தவாறு,

$N_r^{(mn)} = PAQ$ என்று இருக்குமாறு, P, Q என்ற இரண்டு சிறப்பில்லாத அணிகளைக் கண்டுபிடிக்க முடியும். இதைக் கீழ்க்கண்ட உதாரணத்தில் பார்ப்போம் :

மாதிரி 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$PAQ = N$ (இயல்பான உருவம்) இருக்குமாறு P, Q என்று சிறப்பில்லாத அணிகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$A = \quad IAI$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரை (2) — நிரை (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரல் (2) — நிரல் (1)

நிரல் (3) — 2 × நிரல் (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரை (3) + நிரை 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரல் (3) — நிரல் (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ஆகையால் $N_2^{(3\times 3)} = PAQ$.

ஆகையால் $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7.8. A ஒரு சிறப்பில்லாத $n \times n$ அணி என்க. ஆகையால் இதன் தரம் 'n' ஆகிறது. A ஐ இயல்பான உருவம் N க்கு மாற்றினுல் N-ன் தரமும் 'n' ஆக இருத்தல் வேண்டும். ஆகையால் $N = I_n$ (n வரிசை எண் கொண்ட அலகு அணி) ஆக இருத்தல் வேண்டும். சென்ற உதாரணத்தின் மூலம்,

($PAQ = I_n$ என இருக்குமாறு P, Q என்ற சிறப்பில்லாத அணிகளைக் கண்டுபிடிக்க முடியும். எளிய நிரைச் செயல்களைத் தொடர்ந்து செய்வதன் மூலம் P உருவாகுவதால் $P = P_1 P_2 P_3 \ldots P_s$ என இருக்குமாறு, P_1, P_2, P_3...... போன்ற எளிய அணிகள் உண்டு. எளிய நிரல் செயல்களைத் தொடர்ந்து செய்வதன் மூலம் Q கிடைப்பதால், $Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_t$ என இருக்குமாறு, Q_1, Q_2, Q_3, ... போன்ற எளிய அணிகள் உண்டு.

ஆகையால்,

$I_n = P_1 P_2 P_3 \ldots\ldots P_s\ A\ Q_1\ Q_2\ Q_3 \ldots\ldots\ Q_t$ என ஆகிறது.

ஆகையால் $A = P_s^{-1} \ldots P_3^{-1} P_2^{-1}\ P_1^{-1}\ I_n\ Q_t^{-1} \ldots\ Q_3^{-1} Q_2^{-1} Q_1^{-1}$
$= P_s^{-1} \ldots\ldots P_1^{-1} Q_t^{-1} \ldots\ldots Q_1^{-1}$

$P_s^{-1}, P_1^{-1} \ldots Q_t^{-1}, Q_t^{-1} \ldots Q_1^{-1}$ எல்லாம் எளிய அணிகள். ஆகையால் இவைகள் சிறப்பில்லாதவைகள். ஆகையால் சிறப்பில்லாத எந்த அணி A ஐயும், எளிய அணிகளின் தொடர் பெருக்கலாக எழுத முடியும் என உணருகிறோம்.

7.9. A, B என்ற இரண்டு அணிகள், சிறப்பில்லாத P, Q என்ற அணிகளுடன், $B = PAQ$ என்ற இணைப்புக் கொண்டால், A, B ஆகியவைகள் சமத்துவ அணிகள் (**Equivalent Matrices**) எனப்படுகின்றன.

7.10. எளிய நிரைச் செயல்களை (அல்லது நிரல் செயல்களை) மாத்திரம் செய்து ஒரு சிறப்பில்லாத சதுர அணி Aஐ, அலகு அணியாக மாற்றி A-ன் எதிர் அணியை (A^{-1})க் கண்டுபிடிக்கலாம். இதைக் கீழ்க்கண்ட உதாரணத்தில் விளக்குவோம்.

மாதிரி 2 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ என்ருல்,

எதிர் அணி A^{-1} ஐக் கண்டு பிடிக்கவும்.

$$A = I\,A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

நிரை (2) + நிரை (1)
நிரை (3) + 3 × நிரை (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

நிரை (3) — 8 × நிரை (2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 1 \end{bmatrix} A$$

நிரை (1) — நிரை (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 1 \end{bmatrix} A$

நிரை (1) — 2 × நிரை (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 1 \end{bmatrix} A$

நிரை (2) — நிரை (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & -2 \\ 6 & 9 & -1 \\ -5 & -8 & 1 \end{bmatrix} A$

—1 × நிரை (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & -2 \\ 6 & 9 & -1 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix} A$

அதாவது $I = \begin{bmatrix} 10 & 15 & -2 \\ 6 & 9 & -1 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix} A$

ஆகையால் $A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & -2 \\ 6 & 9 & -1 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

7.11. ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் (Linear Equations)

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற 'n' தெரியாக் கணியங்களில் (unknown quantities) ஒருபடிச் சமன்பாடு கீழ்க்கண்ட உருவம் கொண்டு உள்ளது.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n = b_1 \ldots (1)$$

இதில் $b_1 = 0$ ஆனால், இச்சமன்பாடு சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு (Homogeneous Linear Equation) ஆகிறது. அதாவது

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n = 0 \ldots\ldots (2)$$

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற கணியங்களில், n ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை எடுப்போம் :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n_1}x_1 + a_{n_2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad \ldots (3)$$

இவைகளை அணி முறையில்

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \ldots (4)$$

என்றும்,

$$A\,X = b \qquad \ldots (5)$$

என்றும்,

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n_2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

அதாவது … (6)

$$A_{\otimes_1} x_1 + A_{\otimes_2} x_2 + \ldots + A_{\otimes_n} x_n = b \qquad \ldots (7)$$

என்ற உருவங்களிலும் எழுதலாம்.

சமன்பாடுகள் (3) க்குத் தகுந்த சம படித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை (Associated system of Homogeneous equations) கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$A\,X = 0 \qquad \ldots (8)$$

அல்லது $A_{\otimes_1} x_1 + A_{\otimes_2} x_2 + \ldots\ldots A_{\otimes_n} x_n = 0$

… (9)

ஒரு சமன்பாடுகளின் தொகுதிக்கு (A system of equations)த் தீர்வுத் தொகுதி (a system of solutions) ஒன்றேனும் இருக்குமானால், சமன்பாடுகள் முரணற்றவை (Consistent) எனப்படுகின்றன.

தீர்வுத் தொகுதி ஒன்றேனும் இல்லாவிட்டால் சமன்பாடுகள் முரணானவை (Inconsistent) எனப்படுகின்றன.

மேலே கூறிய (8) என்ற சமன்பாடுகளுக்கு $X = 0$ என்ற தீர்வுத் தொகுதி எப்பொழுதும் உண்டு.

ஆனால் இந்த $X = 0$ என்ற தீர்வுத் தொகுதிக்கு அற்பமான தீர்வு (Trivial solution) என்பது பெயர். $X = 0$ அல்லாத தீர்வுக்கு 'அற்பமற்ற தீர்வு' (non-trivial solution) என்பது பெயர். (8) போன்ற சமன்பாடுகளுக்கு அற்பமற்ற தீர்வுகள் கண்டுபிடிப்பது சுவையான ஒரு நோக்கமாகும்.

7.12. $AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளின் ஒரு தீர்வுத் தொகுதி X_0 என்க. இந்தத் தீர்வுத் தொகுதியை ஒரு தீர்வு வெக்டர் (Solution Vector) எனவும் கூறுவது உண்டு. இப்பொழுது

$$A X_0 = B \text{ என ஆகிறது.}$$

$AX = 0$ என்ற சமன்பாடுகள், $AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளுக்குத் தகுந்த சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகள். $AX = 0$ என்ற சமன் பாடுகளின் ஒரு பொதுவான தீர்வு Y என்க. அதாவது $AY = 0$. இப் பொழுது, $AX = B$ என்றவைகளின் பொதுவான தீர்வு X_1 ஐ

$X_1 = X_0 + Y$ என எழுதலாம்.

$$\text{ஏனெனின், } AX_1 = A(X_0 + Y)$$
$$= A X_0 + AY$$
$$= B + 0 = B$$

7.13. $AX = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வு வெக்டர்கள் V_n என்ற வெக்டர் வெளியின் ஓர் உள் வெளியாகின்றன.

நிறுவல்: A ஒரு $(m \times n)$ அணி என்க. இதன் தீர்வு வெக்டர் களின் உட்பொருள்களின் எண்ணிக்கை n ஆக இருத்தல் வேண்டும். ஆகையால் எந்தத் தீர்வு வெக்டரும் V_n ஐச் சார்ந்ததாக இருத்தல் வேண்டும்.

X, Y என்ற இரண்டு தீர்வு வெக்டர்களை எடுப்போம். ஆதலால் $AX = 0$, $AY = 0$ என ஆகின்றன.

$A[kX] = kA(X) = 0$ என ஆகிறது.

ஆகையால் kX என்ற வெக்டரும் ஒரு தீர்வு வெக்டர்.

$$A[X+Y] = AX+AY$$
$$= 0+0 = 0$$

ஆகையால் $(X+Y)$ -ம் ஒரு தீர்வு வெக்டர். ஆகையால் தீர்வு வெக்டர்கள் V_n-ன் ஓர் உள் வெளியாக அமைகின்றன.

7.14. ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வைக் கண்டு பிடிக்க **'கிராமரின் விதி' (Cramer's Rule):**

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளை எடுக்கவும் :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \dots\dots (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \dots\dots (2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \quad \dots\dots (n)$$

குணகங்களின் அணி $A = (a_{rs})$ என்போம்.

மேலும் $|A| \neq 0$ என்போம்.

$|a_{rs}|$ என்ற அணிக் கோவையில் a_{ij}-ன் துணைக் காரணி (Co-factor) A_{ij} என்க.

$(1) \times A_{11} + (2) \times A_{21} + \dots\dots + (n) \times A_{n1}$ என எடுப்போம்.

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}) + x_2(a_{12}A_{11} + \dots + a_{n2}A_{n1}) + \dots$$
$$\dots + x_n(A_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1})$$
$$= b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}$$

இதில் $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1} = |A|$ என்றும்,

$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1}$ போன்றவைகள் பூச்சியங்கள் என்றும் உள்ள அணிக் கோவையின் 'தன்மைகளை நினைவிற் கொள்வோம்.

ஆகையால், $x_1|A| = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots\dots + b_nA_{n1}$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆனால் வலக் கைப்பக்கம்,
$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

என ஆகிறது.

$$\text{ஆகையால் } x_1 = \frac{\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}{|A|}$$

இதே போல, பொதுவாக

$$x_i\text{-ன் மதிப்பு } \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}{|A|}$$

என ஆகிறது.

அதாவது, தொகுதியில் (Numerator) குணகங்களின் அணிக் கோவையில் 'i' என்ற நிரலுக்குப் பதிலாக $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ என்ற நிரலை எழுதி, குணகங்களின் அணிக் கோவையால் வகுக்க வேண்டும்.

7.15. 'கிராமரின் விதியை $AX = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்குப் பயன்படுத்தினால் ஒரு முக்கியமான முடிவு கிடைக்கிறது.

$$x_i = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}{|A|}$$

$$= \frac{0}{|A|} = 0 \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

ஆகையால், $|A| \neq 0$ என்றால், தீர்வு வெக்டர், ஒரு பூச்சிய வெக்டர், அதாவது ஓர் அற்பமான தீர்வுதான் எனக் கிடைக்கிறது. $|A| = 0$ என்றால், பூச்சியமல்லாத தீர்வு வெக்டர் கிடைக்கலாம். ஆகையால் $AX = 0$ என்பதற்கு அற்பமில்லாத தீர்வு கிடைக்க வேண்டுமானால் $|A| = 0$ என இருத்தல் அவசியமாகிறது.

7.16. ஓர் அணியின் தரம் (Rank) என்ன என்பதை 7.2. என்ற பகுதியில் பார்த்தோம். இப்பொழுது, ஓர் அணியில் நிரைத் தரம் (Row rank), நிரல் தரம் (Column rank) என்ன என்பதைப் பார்ப்போம்.

நிரைத் தரம் (Row Rank) : A என்ற அணியிலுள்ள நிரை வெக்டர்களின் ஒருபடித்தான சார்பு (ஒ.ப.சா.) இல்லாத வெக்டர்களின், மீப்பெரு எண்ணிக்கைக்கு நிரைத் தரம் என்பது பெயர். (Row rank of A is the maximum number of linearly independent row vectors of A.)

நிரல் தரம் (Column rank) : A என்ற அணியிலுள்ள நிரல் வெக்டர்களில் ஒ.ப.சா. இல்லாத வெக்டர்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கைக்கு நிரல் தரம் என்பது பெயர்.

தேற்றம் 7.4.

A என்ற ஓர் அணியின் தரம் 'r' என்றால், A-ன் ஒரு விளிம்பு சிற்றணிக் கோவையைக் (Critical Minor) கொண்ட r, நிரைகளும் (நிரல்களும்) ஒ ப.சா. இல்லாதவைகள். மேலும் எந்த நிரையையும் (நிரலையும்) அந்த r நிரைகளின் (நிரல்களின்) ஒரு படித்தான சேர்க்கையாக எழுத முடியும்.

$A = (a_{ij})$ = ஒரு $m \times n$ அணி என்க. இதன் தரம் r என்க. இதன் ஒரு விளிம்பு சிற்றணிக் கோவை $\triangle$, 'r' வரிசை எண் உடையது. இது A-ல் இடக் கை மேல் மூலையாகக் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கட்டும்.

$$\triangle = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix} \neq 0$$

A-ன் முதல் r நிரைகள் ஒ. ப. சா. இல்லாதவைகள் எனக் காட்டுவோம்.

$$\alpha_1 (a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}) + \alpha_2 (a_{21}, a_{22} \cdots a_{2n}) + \cdots\cdots$$
$$\cdots + \alpha_r (a_{r1}\ a_{r2} \cdots a_{rn}) = 0 \text{ என்க.}$$

இடக் கைப் பக்கத்திலுள்ள வெக்டர்களின் கூட்டல், அதே வரிசை எண்ணுடைய வெக்டர் தான். இதன் எல்லா உட்பொருள்களும் பூச்சியங்கள். முதல் r உட்பொருள்களை எடுப்போம்.

அவைகள் பூச்சியங்கள்.

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots\cdots + \alpha_r a_{r1} = 0$$
$$\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \cdots\cdots + \alpha_r a_{r2} = 0$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\alpha_1 a_{1r} + \alpha_2 \ a_{2r} + \cdots\cdots \ + \alpha_r a_{rr} = 0$$

இவைகளின் குணகங்களின் அணிக் கோவை பூச்சியமல்லாததால் $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_r = 0$. ஆகையால் முதல் r நிரைகளும் ஒ.ப.சா. இல்லாதவைகள்.

இப்பொழுது, A-ன் வேறு எந்த நிரையும், இந்த r நிரைகளின் ஒருபடித்தான சேர்க்கை எனக் காண்பிப்போம்.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

என்ற $(r+1)$ வரிசை எண்ணுடைய அணிக் கோவையை எடுப்போம். இதில் $r+1 \leq i \leq m$ எனவும், $1 \leq j \leq n$ எனவும் கொள்வோம். $\leq r$ என்றால் D-ல், இரண்டு நிரல்கள் முற்றொருமைகளாக இருக்கும். ஆகையால் $D = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. $j > r$ என்றால், D என்பது A-ன், $(r+1)$ வரிசை எண் கொண்ட ஓர் அணிக் கோவை. A-ன் தரம் 'r' என்பதால் $D = 0$ எனக் கிடைக்கிறது a_{tj} $(t = 1, 2, \ldots\ldots r)$ என்பதன் துணைக் காரணி (Co-factor) t, i இவைகளைப் பொருத்தது; ஆனால் j ஐப் பொருத்ததல்ல. ஆகையால் a_{tj}-ன் இணைக்காரணி λ_{ti} என்க.

D ஐ j என்ற நிரலின் சார்பாக விவரிப்போம்.

$$0 = D = a_{ij}\,\lambda_{1i} + a_{2j}\,\lambda_{2i} + \ldots + \ldots + a_{rj}\,\lambda_{ri} + a_{ij}\,\Delta$$

ஆகையால்

$$a_{ij} = a_{1j}\,\mu_{1i} + a_{2j}\,\mu_{2i} + \ldots + a_{rj}\,\mu_{ri}$$

$(j = 1, 2, \cdots n)$ என எழுதலாம்.

இங்கு $\mu_{ri} = \dfrac{-\lambda_{ri}}{\Delta}$

ஆகையால், $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in})$ என்ற 'i' என்ற நிரையை

$$[\,(a_{11}\,\mu_{1i} + a_{21}\,\mu_{2i} + \ldots\ldots\ldots + a_{r1}\,\mu_{ri}),$$
$$(a_{12}\,\mu_{1i} + a_{22}\,\mu_{2i} + \ldots\ldots\ldots + a_{r2}\,\mu_{ri}),$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$(a_{1n}\,\mu_{1i} + a_{2n}\,\mu_{2i} + \ldots\ldots\ldots + a_{rn}\,\mu_{ri})\,]$$

என எழுதலாம்

$$= [\,\mu_{1i}\,(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{2n}) + \mu_{2i}\,(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) + \ldots \ldots + \mu_{ri}\,(a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn})\,]$$

என எழுதலாம்.

ஆகையால் 'i' என்ற நிரையை, முதல் 'r' நிரைகளின் ஒரு படித்தான சேர்க்கையாக எழுதலாம்.

இதே போன்ற முடிவு நிரல்களுக்கும் உண்டு.

தேற்றம் 7.5.

ஓர் அணியின் தரம் 'r' என்ருல் அந்த அணியின் 'நிரைத் தரமும்' 'r' என்றும் 'நிரல் தரமும்' 'r' என்றும் ஆகின்றன.

$(m \times n)$ அணி A-ன் தரம் 'r' என்க.

ஆகையால் தேற்றம் 7. 4-ன் படி A-ல் 'r' ஓ. ப. சா. இல்லாத நிரைகள் $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_r$ உண்டு எனவும், எந்த நிரையையும் இந்த 'r' நிரைகளின் ஒரு படித்தான சார்பாக எழுதலாம் எனவும் தெரிகிறது A-ன் m நிரல்களாலும் பிறப்பிக்கக் கூடிய வெக்டர் வெளி V என்க. இந்த வெக்டர் வெளி, $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_r$ ஆகியவைகளாலும் பிறப்பிக்கக் கூடும் என உணரலாம். ஆனுல் இவை ஓ.ப.சா. இல்லாதவை. ஓ.ப.சா இல்லாத பிறப்பாக்கிகள் என்பதால் இவைகள் ஓர் ஆதாரக் கணமாகின்றன. இதில் r பொருள்கள் உள்ளதால் V-ன் பரிமாணம் r ஆகிறது. அதாவது $d(V) = r$. ஆகையால் ஓ.ப.சா. இல்லாத நிரைகளின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை r. ஆதலால் நிரைத் தரம் r ஆகிறது.

நிரைத் தரம் $R_1(A)$ என்க

நிரல் தரம் $R_2(A)$ என்க.

$R(A) = R_1(A)$ என நிருபித்து விட்டோம்.

$$R(A) = R(A^T) = R_1(A^T) = R_2(A)$$

எனக் கிடைக்கிறது

ஆதலால் $R_2(A) = r$.

ஆதலால் $R(A) = R_1(A) = R_2(A) = r$ என உள்ளது.

கிளைத் தேற்றம் 1 :

ஓ. ப. சா. இல்லாத நிரைகளின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை ஓ.ப.சா. இல்லாத நிரல்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கைக்குச் சமம் $[= r = R(A)]$.

கிளைத் தேற்றம் 2 :

ஒரு $(n \times n)$ சதுர அணி A, சிறப்பான அணியானுல் (Singular) $|A| = 0$ என ஆகிறது, ஆதலால் $R(A) < n$. ஆதலால் $R_1(A) = R_2(A) < n$. ஆகையால் A-ன் நிரைகள் ஒருபடிச் சார்பு கொண்டவை. இதே போல் A-ன் நிரல்கள் ஓ.ப.சா. கொண்டவை.

கிளைத் தேற்றம் 3 :

A ஒரு சிறப்பான அணியாக இல்லாவிட்டால் $|A| \neq 0$ $R(A) = R_1(A) = R_2(A) = n$ ஆகையால் நிரைகள் ஓ. ப. சா இல்லாதவை. இதேபோல நிரல்களும் ஓ. ப. சா. இல்லாதவை.

7.16. வரையறை: கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள்

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

கொடுக்கப்பட்டால்

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

என்ற அணி, குணகங்களின் அணி (Matrix of co-efficients) என்றும்,

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2u} & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

என்ற அணி விஸ்தரிக்கப்பட்ட அணி (**Augmented Matrix**) என்றும் கூறப்படுகின்றன.

தேற்றம் 7.6.

ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் ஒரு தொகுப்பு முரண்பாடு இல்லாமல் இருப்பதற்கு (To be consistent) வேண்டிய, போதிய நிபந்தனை பின் வருமாறு : 'குணகங்களின் அணியும், விஸ்தரிக்கப்பட்ட அணியும் ஒரே 'தரம்' கொண்டவைகளாக இருத்தல் வேண்டும்.'

நிறுவல் :

சமன்பாடுகளை 7. 11 என்ற பகுதியில் உள்ளபடி

$x_1 A_{\otimes_1} + x_2 A_{\otimes_2} + \cdots + + x_n A_{\otimes_n} = b$ என எழுதலாம். இதில் $A_{\otimes_1}, A_{\otimes_2}, \ldots$ என்பவைகள் அணி A-ன் நிரல் வெக்டர்கள்.

$A_{\otimes_1}, A_{\otimes_2}, \dots A_{\otimes_n}$, b ஆகியவைகள் அணி B-ன் நிரல் வெக்டர்கள். முதலில் $AX = b$ முரணற்றவை என்க. ஆதலால், $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$ என்ற ஒரு தீர்வுத் தொகுப்பு உண்டு. ஆகையால், $y_1 A_{\otimes_1} + y_2 A_{\otimes_2} + \dots + \dots y_n A_{\otimes_n} = b$ என ஆகிறது.

ஆகையால் b, A-ன் நிரல் வெக்டர்களின் ஒருபடித்தான சேர்க்கை

ஆகையால், விஸ்தரிக்கப்பட்ட அணியின் தரம் A-ன் தரத்தைவிட அதிகமாக இருக்க முடியாது. ஆகையால்,

$$R(B) \le R(A)$$

ஆனால் A, B-ன் ஒரு சிற்றணி

ஆகையால், $R(A) \le R(B)$

ஆகையால், $R(A) = R(B)$ எனக் கிடைக்கிறது.

மறுதலையாக, $R(A) = R(B) = r$ என்போம்.

ஆகையால் r வரிசை எண் உடைய (பூச்சியமல்லாத) விளிம்பு அணிக் கோவை D, A-ல் உள்ளது. இது B-யிலும் உள்ளது.

இதைத் தன்னிடம் கொண்ட, A-ன் r நிரல்கள் $A_{\otimes_1}, A_{\otimes_2}, \dots A_{\otimes_r}$ என்க. தேற்றம் 7·4-ன்படி A அல்லது B-ன் வேறு எந்த நிரலையும், இவைகளின் ஒருபடித்தான சேர்க்கையாக எழுதலாம்.

உதாரணமாக,

$b = z_1 A_{\otimes_1} + z_2 A_{\otimes_2} + \dots + z_r A_{\otimes_r}$ என்க. ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளுக்கு $(z_1\ z_2, \dots\dots z_r, 0, 0, \dots\dots, 0)$ என்ற தீர்வு வெக்டர் உள்ளது.

மாதிரி 3 : கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் முரண்பாடற்றவை எனக் காண்பிக்கவும்.

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 7z &= 4 \\ 3x + 26y + 2z &= 9 \\ 7 + 2y + 10z &= 5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

3 × நிரை (1); 5 × நிரை (2)

$$\sim \begin{bmatrix} 15 & 9 & 21 \\ 15 & 130 & 10 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

நிரை (2) — நிரை (1)

$$\sim \begin{bmatrix} 15 & 9 & 21 \\ 0 & 121 & -11 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$\frac{7}{3}$ × நிரை (1); 5 × நிரை (3)

$$\sim \begin{bmatrix} 35 & 21 & 49 \\ 0 & 121 & -11 \\ 35 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

நிரை (3) — நிரை (1)

$\frac{1}{11}$ × நிரை (2)

$$\sim \begin{bmatrix} 35 & 21 & 49 \\ 0 & 11 & -1 \\ 0 & -11 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரை (3) + நிரை (2)

$$\sim \begin{bmatrix} 35 & 21 & 49 \\ 0 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆகையால், $R(A) = 2$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 26 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

3 × நிரை (1); 5 × நிரை (2)

$$\sim \begin{bmatrix} 15 & 9 & 21 & 12 \\ 15 & 130 & 10 & 45 \\ 7 & 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

நிரை (2) — நிரை (1)

$$\sim \begin{bmatrix} 15 & 9 & 21 & 12 \\ 0 & 121 & -11 & 33 \\ 7 & 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$\frac{7}{3}$ × நிரை (1);
5 × நிரை (3);
$\frac{1}{11}$ × நிரை (2)

$$\sim \begin{bmatrix} 35 & 21 & 49 & 28 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \\ 35 & 10 & 50 & 25 \end{bmatrix}$$

நிரை (3) − நிரை (1) $\sim \begin{bmatrix} 35 & 21 & 49 & 28 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

நிரை (3) + நிரை (2) $\sim \begin{bmatrix} 35 & 21 & 49 & 28 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ஆகையால் $R(B) = 2$

ஆதலால் $R(A) = R(B) = 2$

ஆகையால் சமன்பாடுகள் முரணற்றவை.

7.17. ஒரு சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் பொதுத் தீர்வு காணும் முறை:

சமன்பாடுகள்:

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots\dots + a_{1n}\, x_n = b_1$

$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots\dots + a_{2n}\, x_n = b_2$

....

$a_{m_1}\, x_1 + a_{m_2}\, x_2 + \dots + a_{m_n}\, x_n = b_m$ என்க.

$R(A) = R(B) = r$ என்க.

ஆதலால் 'r' வரிசை எண் கொண்ட பூச்சியமல்லாத சிற்றணிக் கோவை D உண்டு. இக்கோவையைத் தம்மிடம் கொண்டுள்ள 'r' சமன்பாடுகளை எடுத்தால் போதுமானது. அவைகள்,

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n = b_1$

....

$a_{r_1}\, x_1 + a_{r_2}\, x_2 + \dots + a_{rn}\, x_n = b_r$ என இருக்கட்டும்.

இவைகளை,

$a_{11}\ x_1 + \dots + a_{1r}\, x_r = b_1 - a_{1,\,r+1}\, x_{r+1} - \dots - a_{1n}\, x_n$

$a_{21}\ x_1 + \dots + a_{2r}\, x_r = b_2 - a_{2,\,r+2}\, x_{r+1} - \dots - a_{2n}\, x_n$

....

$a_{r1}\ x_1 + \dots + a_{rr}\, x_r = b_r - a_{r,\,r+1}\, x_{r+1} - \dots - a_{rn}\, x_n$

என எழுதலாம்.

இவைகளில் x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n என்ற கணியங்களுக்கு நமது இச்சைப்படி எந்த மதிப்புகள் வேண்டுமானுலும் கொடுக்கலாம்.

பிறகு, $D = 0$ என்பதால்

x_1, x_2, ..., x_r ஆகியவைகளைக் 'கிராமர் முறைப்படி'க் கண்டு பிடித்து விடலாம்.

இவைகளில் x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n என்பவைகள் $(n-r)$ மாறு ராசிகள் (Parameter). ஆகையால் எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

மாதிரி 4 : மாதிரி 3-ல் உள்ள சமன்பாடுகளை எடுப்போம்.

$$R(A) = R(B) = 2 < 3.$$

பூச்சியமில்லாத ஏதாவது ஒரு மீப்பெரு சிற்றணிக் கோவையை எடுப்போம். உதாரணமாக $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 26 \end{vmatrix}$ ஐ எடுப்போம்.

இவைகளைக் கொண்ட இரண்டு சமன்பாடுகளைக் கருதினுல் போதுமானது.

அவைகள்,
$$5x + 3y + 7z = 4$$
$$3x + 26y + 2z = 9$$

இவைகளை
$$5x + 3y = 4 - 7z$$
$$3x + 26y = 9 - 2z$$
என எழுதலாம்.

$$15x + 9y = 12 - 21z$$
$$15x + 130y = 45 - 10z$$
$$\overline{\qquad 121y = 33 + 11z}$$

அல்லது $y = \dfrac{3}{11} + z.$

$$x = \frac{7}{11} - 2z$$

z-க்கு நம் இச்சைப்படி எந்த மதிப்பும் கொடுக்கலாம்;

$z = 1$ என்றுல், $x = -\dfrac{15}{11}$, $y = \dfrac{14}{11}$;

$z = 2$ என்றுல், $x = -\dfrac{37}{11}$, $y = \dfrac{25}{11}$

இதுபோல எண்ணற்ற தீர்வுத் தொகுதிகள் உள்ளன.

7.18. 'n' கணியங்களில் 'n' ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். குணகங்களின் அணி 'A' என்றும், விஸ்தரித்த அணி 'B' என்றும் கொள்வோம். கீழ்க்கண்ட மூன்று முக்கியமான முடிவு களை உணரலாம் :

(1) $R(A) = R(B) = n$ என்றால் ஒரே ஒரு தீர்வுத் தொகுதி தான் உண்டு. இவைகளைக் 'கிராமர்' முறையில் கண்டு பிடிக்கலாம்.

(2) $R(A) = R(B) < n$ என்றால் எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு. 7.17-ல் உள்ள முறைப்படி தீர்வுத் தொகுதி களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

(3) $R(A) < R(B)$ என்றால், தீர்வுகள் கிடையாது. அதாவது, சமன்பாடுகள் முரணானவை.

உதாரணம் (i) $2x + 3y = 1$

$$3x + 5y = 1$$

இதில் $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $R(A) = 2$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} ; R(B) = 2$$

$$\therefore R(A) = R(B) = 2$$

ஆகையால், ஒரே ஒரு தீர்வுத் தொகுதிதான் உண்டு. அதாவது $x = 2, y = -1$

(ii) $5x + y = 1$

$$10x + 2y = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} ; R(A) = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 2 \end{bmatrix} ; R(B) = 1$$

$$R(A) = R(B) = 1 < 2$$

ஆதலால் $5x + y = 1$ என்பதை மாத்திரம் எடுத்தால் போதும்.

$$5x = 1 - y$$

அல்லது $x = \dfrac{1 - y}{5}$

ஆகையால் $\left[\frac{1-y}{5}, \ y\right]$ என்ற பொதுத் தீர்வு கிடைக்கிறது. இதில் y-க்கு நமது இச்சைப்படி எந்த மதிப்பும் கொடுக்கலாம். ஆகையால் எண்ணற்ற தீர்வுத் தொகுதிகள் உண்டு.

(iii) $3x - 4y = 1$

$-6x + 8y = 3$

$$(A) = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \quad ; R(A) = 1$$

$$(B) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -6 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad ; R(B) = 2$$

$R(A) < R(B)$.

சமன்பாடுகள் முரணானவை; தீர்வே கிடையாது.

தேற்றம் 7.7.

A என்ற ஒரு $m \times n$ அணியின் தரம் 'r' ஆனால், $AX=0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு, $n-r$ ஒ. ப. சா. இல்லாத தீர்வு வெக்டர்கள் உண்டு.

$AX=0$ என்பதை,

$$x_1 A_{\otimes_1} + x_2 A_{\otimes_2} + \dots + x_r A_{\otimes_r} + x_{r+1} A_{\otimes_{r+1}} + \dots + x_n A_{\otimes_n} = 0$$

என எழுதலாம்.—(1)

A-ன் தரம் 'r' ஆதலால், A-ன் நிரல் தரமும் 'r' ஆக உள்ளது. ஆதலால் ஒ. ப. சா. இல்லாத நிரல்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை r. உதாரணமாக முதல் 'r' நிரல்களும் ஒ. ப. சா. இல்லாதவையாக இருக்கட்டும். இப்பொழுது $A_{\otimes_{r+1}}, A_{\otimes_{r+2}}, \dots A_{\otimes_n}$ என்ற $n-r$' நிரல்கள் ஒவ்வொன்றும் முதல் r நிரல்களின் ஒருபடித்தான சேர்க்கையாகும். ஆதலால்,

$$\begin{aligned} A_{\otimes_{r+1}} &= \alpha_1 A_{\otimes_1} + \alpha_2 A_{\otimes_2} + \dots\dots + \alpha_r A_{\otimes_r} \\ A_{\otimes_{r+2}} &= \beta_1 A_{\otimes_1} + \beta_2 A_{\otimes_2} + \dots\dots + \beta_r A_{\otimes_r} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{\otimes_n} &= \theta_1 A_{\otimes_1} + \theta_2 A_{\otimes_2} + \dots\dots + \theta_r A_{\otimes} \end{aligned}$$

என்று எழுதலாம்.

அல்லது,

$$\alpha_1 A_{\otimes_1} + \alpha_2 A_{\otimes_2} + \dots + \alpha_r A_{\otimes_r} - A_{\otimes_{r+1}} = 0 \dots (1)$$
$$\beta_1 A_{\otimes_1} + \beta_2 A_{\otimes_2} + \dots + \beta_r A_{\otimes_r} - A_{\otimes_{r+2}} = 0 \dots (2)$$

....போன்று எழுதலாம்.

(1) இலிருந்து $[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r, -1, 0, 0, \dots\dots 0]$ என்பது I-ன் ஒரு தீர்வுத் தொகுதி என உணரலாம்.

(2) இலிருந்து $[\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r, 0, -1, 0, \dots\dots 0]$ என்பது I-ன் மற்ருெரு தீர்வுத் தொகுதி எனப் பார்க்கலாம்.

இதேபோல $(n-r)$ தீர்வுத் தொகுதிகள் கிடைக்கின்றன. இவைகள் ஓ. ப. சா. இல்லாதவைகள் என்பதையும் உணரலாம்.

மாதிரி 4 : $a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

என்ற மூன்று தளங்கள் எவ்விதங்களில் சந்திக்கின்றன எனப் பார்க்கவும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

(i) $R(A) = R(B) = 3$ என்ருல், ஒரே ஒரு தீர்வுத் தொகுதி தான் உண்டு. ஆகையால் மூன்று தளங்களும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

(ii) $R(A) = R(B) = 2$ என்ருல், எண்ணற்ற தீர்வுத் தொகுதிகள் உண்டு. மேலும் B-ன் ஒரு நிரை, மற்ற இரண்டு நிரைகளின் ஒருபடித்தான சேர்க்கையாக இருக்கும். ஆகையால் மூன்று தளங்களும் ஒரு நேர் கோடு வழியே செல்லுகின்றன.

(iii) $R(A) = 2$; $R(B) = 3$ என்ருல் சமன்பாடுகள் முரணானவை. தீர்வே கிடையாது. மேலும், A-ன் ஒரு நிரை, மற்ற இரண்டு நிரைகளின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக உள்ளதால், ஒரு தளம், மற்ற இரண்டு தளங்கள் சந்திக்கும் நேர் கோட்டின் வழியே செல்லும் ஒரு தளத்துக்கு இணையாகும். ஏனெ

னின், உதாரணமாக மூன்றுவது தளத்தைக் கீழ்க்கண்ட வாறு எழுதலாம்:

$$k_1(a_1 x + b_1 y + c_1 z) + k_2(a_2 x + b_2 y + c_2 z) = d_3 (\neq k_1 d_1 + k_2 d_2)$$

ஆகையால் மூன்று தளங்களும் ஒரு பட்டகத்தை உரு வாக்கும்.

(iv) $R(A) = 1$; $R(B) = 3$

இந்த வகை இருத்தல் முடியாது. ஏனெனின், $R(A) = 1$ என்பதால் A-ல், 2 வரிசை எண் உடைய எந்த சிற்றணிக் கோவையும் பூச்சியமாகிறது. ஆகையால் B-ல் பூச்சிய மல்லாத எந்த 3 வரிசை எண் உடைய சிற்றணிக் கோவை யும் இருத்தல் முடியாது.

(v) $R(A) = 1$, $R(B) = 2$

சமன்பாடுகள் முரணுனவை. ஆகையால் வகை (ii) ஐப் போல் தீர்வே கிடையாது. ஆனுல் A-ன் இரண்டு நிரைகள் மூன்றுவது நிரையின் மடங்குகளாக இருப்பதால் மூன்று தளங்களும் இணையானவை.

(vi) $R(A) = 1$; $R(B) = 1$

மூன்று சமன்பாடுகளும் ஒன்ருகிவிடும். ஆகையால் மூன்று தளங்களும் ஒன்றிவிடும்.

பயிற்சி

(1) கீழ்க்கண்ட அணிகளை இயல்பான உருவத்துக்கு மாற்றவும்.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) கீழ்க்கண்ட அணிகளின் தரங்களை எளிய செயல்கள் மூலம் கண்டு பிடிக்கவும் :

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

(3) கீழ்க் கண்ட A என்ற அணி, $PAQ = N$ (இயல்பான உருவம்) என ஆகுமாறு, P, Q என்ற சிறப்பில்லாத அணிகளைக் கண்டு பிடிக்கவும் :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 11 & -19 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 7 & -11 & -6 & 1 \\ 7 & 2 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

(4) கீழ்க் கண்ட A என்ற அணியின் A^{-1} என்ற எதிர் அணியை எளிய நிரைச் செயல்கள் மூலம் கண்டு பிடிக்கவும்.

(a) $\begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(5) 'கிராமர்' முறைப்படி கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணவும்.

(a) $9x + 7y + 3z = 6$, $5x - y + 4z = 1$, $6x + 8y + 2z = 4$

(b) $x - 2y + z = 0$, $2x + z = 3$, $5x - 3y = 2$

(6) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் முரண்பாடு உள்ளனவா, அல்லவா எனப் பார்க்கவும்.

(a) $x + y + z = 1$, $x - 2y + 3z = 4$, $x + 3y + 6z = 10$, $x + 4y + 10z = 19$

(b) $x + y + z = 1$, $x + 2y + 3z = 4$, $x + 2y + 5z = 7$, $x + 4y + 7z = 11$

(c) $x + 2y - z = 3$, $3x - y + 2z = 1$, $2x - 2y + 3z = 2$, $x - y + z = -1$

(b) $2x + 6y + 11 = 0$, $6x + 20y - 6z + 3 = 0$, $6y - 18z + 1 = 0$

(7) முரண்பாடு இல்லாதவையா எனப் பார்த்துக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணவும்.

(a) $2x - y + z = 1$, $x + y - z = 2$, $3x - y + z = 0$

(b) $x + 3y + z = 6$, $3x - 2y - 8z = 7$, $4x + 5y - 3z = 17$

(c) $2x - 3y + 6z = 3$, $4x - y + z = 1$, $3x - 2y + 3z = 4$

(d) $3x - 7v + 14z - 8w = 24$, $x - 4y + 3z - w = -2$, $y + z - w = 6$, $2x - 15y - z + 5w = -46$

(8) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

(a) $2x + 3y + 4z = 0$, $3x + 4y + 5z = 0$, $4x + 5y + 6z = 0$

(c) $5x + 4y - 2z = 0$, $4x + 5y + 2z = 0$, $-2x + 2y + 8z = 0$

(b) $x + 3y - 2z = 0$, $2x - y + 4z = 0$, $x - 11y + 14z = 0$

(d) $x + y + 4z = 0$, $2x + 3y + z = 0$, $x + y - z = 0$

8. இருபடி உருவங்கள்
(Quadratic Forms)

8.1. **வரையறை:** $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ போன்ற கணியங்களில் சமபடித் தான இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை, இருபடி உருவம் எனப்படுகிறது. [A Quadratic form is a homogeneoues polynomial of the second degree in the quantities $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$]

உதாரணம் : $2x^2+3xy+5y^2$; $3x^2 + 2y^2 - 5z^2 - xy + 2yz - 3zx$ போன்றவைகள் இருபடி உருவங்கள்.

8.2. x_1, x_2, x_3 ஆகியவைகளில் பொதுவான இருபடி உருவம் பின் வருமாறு :

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1.$$

இதில், a_{rs} போன்ற குணகங்களும், 'x_i' போன்ற கணியங்களும் மெய்யெண் கணத்தைச் சார்ந்தன.

இதை, $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j \ (a_{ij} = a_{ji})$ எனவும் எழுதலாம்.

மேலும், இதே உருவத்தை, மூன்று அணிகளின் பெருக்கல் பலனைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம் :

$$(x_1 \ x_2 \ x_3)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$[a_{ij} = a_{ji}]$

அல்லது, $X^T A X$ எனவும் எழுதலாம்.

இதில் $X = [x_1, x_2, x_3]^T$ என்றும்,

$A = (a_{rs})$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகவும் உள்ளது.

இதேபோல, n கணியங்களில் இருபடி உருவத்தைக் கீழ்க்கண்ட வகைகளில் எழுதலாம் :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

$$(2) \quad X^T A X; \text{ இதில் } (A) = (a_{rs}) \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

$$\text{மற்றும் } X = [x_1\ x_2, \ldots\ldots, x_n]^T$$

8.3. ஒருபடித்தான மாற்றங்கள் : (Linear Transformations)

$X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}^T$ என்ற வெக்டர் என்க.

$P = (n \times n)$ அணி (p_{rs}) என்க.

P என்ற அணியால் X என்ற வெக்டரை,

$Y = [y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n]^T$ என்ற வெக்டராகக், கீழ்கண்டவாறு மாற்றலாம்:

$Y = P X$; அதாவது

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

அல்லது $y_1 = p_{11} x_1 + p_{12} x_2 + \ldots + p_{1n} x_n$

$y_2 = p_{21} x_1 + p_{22} x_2 + \ldots + p_{2n} x_n$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y_n = p_{n1} x_1 + p_{n2} x_2 + \ldots + p_{nn} x_n.$

எந்த X க்கும் தகுந்த Y உண்டு. P, ஒரு சிறப்பில்லாத அணியானல் P^{-1} உண்டு,

ஆகையால் $X = P^{-1} Y$ என எழுதலாம். இதன்படி, எந்த Y-க்கும் தகுந்த X உண்டு என ஆகிறது. ஆகையால் X, Y ஆகியவைகளுக்குள் ஒன்றுக்கொன்ருன பிரத்தியேக இணைப்பு உள்ளது.

8.4. ஓர் இருபடி உருவத்தை, மற்ருேர் இருபடி உருவத்துக்கு மாற்றலாம்.

$X^T A X$ என்பது ஓர் இருபடி உருவமென்க. ……… (1)

$X = P Y$ என்ற மாற்றத்தைச் செய்யவும்.

இதை (1) என்ற உருவத்தில் பிரதியீடு செய்யவும்.

$$(P Y)^T A (P Y) = Y^T \left(P^T A P\right) Y = Y^T B Y.$$

இதில் $B = P^T A P$.

B-ம் ஒரு சமச்சீர் அணி. ஏனெனில்

$$B^T = (P^T A P)^T = P^T A^T P = P^T A P = B$$

ஆதலால் $Y^T B Y$ என்பது Y-ல், ஓர் இருபடி உருவம்.

8.5. A, B என்ற அணிகள் சிறப்பில்லாத P என்ற அணியுடன் கீழ்க்கண்ட இணைப்பு கொண்டால், முற்ருெருமை அணிகள் (**Congruent matrices**) எனப்படுகின்றன.

$$B = P^T A P$$

B, A இலிருந்து முற்ருெருமை மாற்றத்தால் அடையப்படுகிறது எனப்படும். இந்த மாற்றத்துக்கு முற்ருெருமை மாற்றம் (Congruent Transformation) என்பது பெயர். இந்த முற்ருெருமை இணைப்பு ஒரு 'சமத்துவ இணைப்பாகும்' (Equivalence Relation).

நிறுவல் : (1) $A = I^T A I$

ஆகையால் A தன்னுடனேயே முற்ருெருமை கொண்டுள்ளது.

(2) $B = P^T A P$ என்க.

$$\left(P^T\right)^{-1} B P^{-1} = A$$

அல்லது $A = (P^{-1})^T B (P^{-1})$ என ஆகிறது.

ஆகையால் A, B உடன் முற்ருெருமை கொண்டுள்ளது.

(3) $A = P^T B P$ என்க.

$B = Q^T C Q$ என்க.

$$\text{ஆதலால் } A = P^T Q^T C Q P$$

$$= (Q P)^T C (Q P)$$

ஆதலால் A, C உடன் முற்றொருமை கொண்டுள்ளது.

தேற்றம் 8.1.

A என்ற பூச்சியமல்லாத ஒரு $(n \times n)$ சமச்சீர் அணி கொடுக்கப் பட்டால் $P^T A P = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற A-ன் சுருக்கமான அணி கிடைக்குமாறு, P என்ற ஒரு $(n \times n)$ அணி உள்ளது. இதில் r என்பது A-ன் தரமாகும்.

நிறுவல் : தரம் r உள்ள A என்ற ஒரு $(n \times n)$ சமச்சீர் அணி கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதை எளிய செயல்கள் மூலம் இதன் சுருக் கமான உருவத்துக்கு மாற்றலாம் என்பது தெரியும். A ஒரு சமச்சீர் அணியாதலால், எந்த ஒரு எளிய நிரைச் செயலைச் செய்து, நிரைகளில் ஒருதேவையான மாற்றம் செய்கிறோமோ, அதே போன்ற ஓர் எளிய நிரல் செயல் செய்து நிரல்களில் அதேபோன்ற மாற்றம் செய்யலாம். இந்த இரண்டு செயல்களையும் அடுத்தடுத்துச் செய்வோமானால், A என்ற அணியை P_1^T என்ற அணியால் முன் பெருக்கல் செய்து உடனே P_1 என்ற அணியால் பின் பெருக்கல் செய்வதற்குச் சமமாகும். இதேபோன்று தேவையான எளிய செயல்களை அடுத்தடுத்துச் செய்து A-ன் சுருக்கமான உருவத்தை அடையலாம். ஆதலால்

$$\begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P_s^T \ldots\ldots P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \ldots P_s$$

$$= (P_1 P_2 \ldots P_s)^T A (P_1 P_2 \ldots P_s)$$

$$= P^T A P \text{ என ஆகிறது.}$$

இதில் A_r என்பது r பொருள்கள் கொண்ட ஒரு மூலைவிட்ட அணி. A-ன் தரம் r ஆனதால் சுருக்கமான உருவத்திலும் தரம் r எனக் கிடைக்கும்.

தேற்றம் 8.2.

மூலைவிட்ட உருவத்துக்குச் சுருக்குதல் (Reduction to diagonal form)

$X^T A X$ என்ற இருபடி உருவத்தை (A-ன் தரம் r) தகுந்த $X = P Y$ என்ற மாற்றத்தினுல் $d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \ldots + d_r y_r^2$ எனச் சுருக்கலாம்.

நிறுவல் :

சென்ற தேற்றத்தின்படி A என்பதை, தகுந்த P என்ற அணியால் $P^T A P = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற உருவத்துக்கு மாற்றலாம் எனப் பார்த்தோம்.

இதில் $A_r = dg\,(d_1, d_2, \ldots, d_r)$ என்றும் பார்த்தோம்.

$X = P Y$ என்ற மாற்றம் செய்வோம்.

$X^T A X$ என்ற உருவத்தில், X க்குப் பிரதியீடு செய்வோம்.

$$X^T A X = (P Y)^T A (P Y)$$

$$= Y^T P^T A P Y$$

$$= Y^T \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y$$

$$= d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \ldots\ldots + d_r y_r^2$$

எனக் கிடைக்கிறது.

[இதற்கு, மூலைவிட்ட உருவம் (diagonal Form) என்பது பெயர்.]

மாதிரி 1 : $6 x_1^2 + 3 x_2^2 + 3 x_3^2 - 4 x_1 x_2 - 2 x_2 x_3 + 4 x_3 x_1$ என்ற இருபடி உருவத்தை மூலைவிட்ட உருவத்துக்கு மாற்றவும்.

இங்கு $a_{11} = 6$; $a_{22} = 3$, $a_{33} = 3$

$a_{12} = -2$, $a_{23} = -1$; $a_{31} = 2$

என உள்ளது. ஆகையால் இவ்வுருவத்தின்

அணி $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ என்றும்,

இருபடி உருவம் $X^T A X$; $X = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ என்று உள்ளது. A ஐ எளிய செயல்கள் மூலம் அதன் இயல்பான உருவத்துக்கு மாற்றுவோம்.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரை (2) + $\frac{1}{3}$ × நிரை (1), நிரை (3) — $\frac{1}{3}$ [நிரை (1)]

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரல் (2) + $\frac{1}{3}$ × நிரல் 1; நிரல் (3) —$\frac{1}{3}$[நிரல் 1]

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரை (3) + $\frac{1}{7}$ × நிரல் (2)

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரல் (3)+

$\frac{1}{7}$ × நிரல் (2)

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $D = P^{T} A P$ என உள்ளது.

இதில் $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X = P$ என்ற மாற்றம் செய்வதால், கீழேயுள்ள மூலைவிட்ட உருவம் கிடைக்கிறது.

$6y_1^2 + \frac{7}{3}y_2^2 + \frac{16}{7}y_3^2$

மாற்றங்களின் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு :

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{7}y_3$$
$$x_2 = y_2 + \frac{1}{7}y_3$$
$$x_3 = y_3$$

8.6. ஓர் இருபடி உருவத்தை மூலை விட்ட உருவமாக மாற்று வதற்கு மற்றொரு வழி உள்ளது. இதற்குச் 'செங்குத்து அணியால் சுருக்குதல்' (Orthogonal Reduction) என்பது பெயர்.

$X^{T}AX$ ஓர் இருபடி உருவமென்க. இதில் A ஒரு மெய்யெண் சமச் சீரணி; X-ம் ஒரு மெய்யெண் வெக்டர். A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$.

இதன் வெவ்வேறு தீர்வுகள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ என்க.

இவைகளுக்குத் தகுந்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் $X_1, X_2, \ldots\ldots X$ என்க.

ஆதலால் $AX_1 = \lambda_1 X_1$; $AX_2 = \lambda_2 X_2$ ...... என உள்ளன.

$X_1, X_2, ..., X_n$ ஒரு செங்குத்து வெக்டர் கணமெனக் காண்பிப்போம்.

A ஒரு சமச் சீரணியாதலால்

$$X_1^T A X_2 = X_2^T A X_1$$

அல்லது $X_1^T \lambda_2 X_2 = X_2^T \lambda_1 X_1$

அல்லது $\lambda_2 X_1^T X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$

அல்லது $(\lambda_2 - \lambda_1) X_1^T X_2 = 0$ ...$[X_2^T X_1 = X_1^T X_2]$

அல்லது $(\lambda_2 - \lambda_1)\ (X_1, X_2) = 0$

ஆதலால், X_1, X_2 ஆகியவைகள் செங்குத்தானவை.

இதேபோல எந்த இரண்டு சிறப்பியல்பு வெக்டர்களும் செங்குத்தானவை என ஆகின்றன. செங்குத்து வெக்டர்களைத் தரப்படுத்தினாலும் செங்குத்துத் தன்மை மாறுவதில்லை. ஆகையால் $X_1, X_2, ...$ $..., X_n$ ஆகியவைகளைத் தரப்படுத்திய வெக்டர்களாகவே கருதுவோம். இவைகளை நிரல்களாக உள்ள அணி *P* என்க.

அதாவது $P = [X_1\ \ X_2\ ....X_n]$

P ஒரு செங்குத்து அணியாகிறது.

ஆகையால் $P^T P = I$; அதாவது $P^T = P^{-1}$

$$\begin{aligned} P^T A P &= P^{-1} A P \\ &= P^{-1} A [X_1\ X_2 \ ......\ X_n] \\ &= P^{-1} [\ AX_1\ AX_2\ ......\ AX_n] \\ &= P^{-1} [\ \lambda_1 X_1 \quad \lambda_2 X_2\ ......\ \lambda_n X_n] \\ &= [\lambda_1 P^{-1} X_1 \quad \lambda_2 P^{-1} X_2\ ......\ \lambda_n P^{-1} X_n] \end{aligned}$$

X_1, *P*-ன் முதல் நிரலானதால், $P^{-1} X_1$ என்பது $P^{-1} P = I$ என்பதன் முதல் நிரல்

அதாவது $\lambda_1 P^{-1} X_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ என ஆகிறது.

அதேபோல $\lambda_2 P^{-1}X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ என ஆகிறது.

ஆகையால் $P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

ஆகையால் $P^T A P = dg(\lambda_1\ \lambda_2 \ldots\ldots\ldots \lambda_n) = D$ என ஆகிறது.

$X = P\,Y$ என்ற மாற்றம் செய்வோம்.

$$X^T A X = (P\,Y)^T A\,(P\,Y)$$

$$= Y^T P^T A\ \ P\,Y$$

$$= Y^T D\,Y$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots\ldots + \lambda_n y_n^2$$

எனக் கிடைக்கிறது.

குறிப்பு: இருபடி உருவத்தின் தரம், n ஐ விடக் குறைவாக இருந்தாலும், மேற்கண்ட முறை சரியானது.

மாதிரி 2: கீழ்க்கண்ட அணி A ஐ, ஒரு செங்குத்து அணியால் மூல விட்ட அணியாக மாற்றவும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு :

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

அல்லது $(1-\lambda)\{(2-\lambda)^2-4\}=0.$

சிறப்பியல்புத் தீர்வுகள் $\lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 4.$

$\lambda = 0$; சமன்பாடுகள் : $2x + 2y = 0$

$$2x + 2y = 0$$
$$z = 0$$

சிறப்பியல்புத் தீர்வு வெக்டர் $(1, -1, 0)$

$\lambda = 1$; சமன்பாடுகள் : $x + 2y = 0$

$$2x + y = 0$$

சிறப்பியல்புத் தீர்வு வெக்டர் $(0, 0, 1)$

$\lambda = 4$; சமன்பாடுகள் :

$$-2x + 2y = 0$$
$$2x - 2y = 0$$
$$-3z = 0$$

சிறப்பியல்புத் தீர்வு வெக்டர் $(1, 1, 0)$.

தரப்படுத்தப் பெற்ற தீர்வு வெக்டர்கள் பின் வருமாறு :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); (0, 0, 1); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

இவைகளை நிரல்களாகக் கொண்ட செங்குத்து

$$\text{அணி} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

மூலைவிட்ட அணி

$$D = P^{-1} A P$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

மாதிரி 3 : கீழ்க்கண்ட இருபடி உருவத்தைச் செங்குத்து அணி மாற்றத்தினுல் வர்க்கங்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கூறவும் :

$$8x^2 + 7y^2 + 3z^2 - 12xy + 4xz - 8yz.$$

இங்கு $a_{11} = 8;\ a_{22} = 7,\ a_{33} = 3$

$$a_{12} = -6;\ a_{23} = -4;\ a_{31} = 2$$

ஆகையால் உருவத்தின் அணி :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு :

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

அல்லது $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$

அல்லது $\lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 45) = 0$

அல்லது $\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 15) = 0$

ஆகையால் சிறப்பியல்புத் தீர்வுகள் :

$$\lambda = 0,\ \lambda = 3,\ \lambda = 15$$

$\lambda = 0;$ சமன்பாடுகள் :

$$8x - 6y + 2z = 0$$
$$-6x + 7y - 4z = 0$$
$$2x - 4y + 3z = 0$$

தீர்வு வெக்டர் : [1, 2, 2]

$\lambda = 3;$ சமன்பாடுகள் :

$$5x - 6y + 2z = 0$$
$$-6x + 4y - 4z = 0$$
$$2x - 4y = 0$$

தீர்வு வெக்டர் : [−2, −1, 2]

$\lambda = 15$; சமன்பாடுகள்:

$$-7x - 6y + 2z = 0$$
$$-6x - 8y - 4z = 0$$
$$2x - 4y - 12z = 0$$

தீர்வு வெக்டர் : [2, −2, 1]

தரப்படுத்திய தீர்வு வெக்டர்கள் :

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] ; \left[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right] ;$$
$$\left[\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

இவைகளை நிரல்களாகக் கொண்ட செங்குத்து அணி

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ஆகையால் மாற்றும் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு :

$$X = PY$$
$$x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z'$$
$$y = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'$$
$$x = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z'$$

இந்த மாற்றத்தினுல் கிடைக்கக் கூடிய மூலைவிட்ட உருவம் :

"$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$" எனப் பார்த்துள்ளோம். ஆகையால், தேவையான உருவம் பின்வருமாறு :

$$0.\,x'^2 + 3.\,y'^2 + 15.z'^2$$

அல்லது $3y'^2 + 15z'^2$

8. 7. வடிவ கணிதத்தில், இருபடி மேற்பரப்பின் (Quadrics) சமன்பாடு, ஓர் இருபடி உருவம். இதன் 3 பிரதான அச்சுகளின் (Principal axes) திசைக் கோசைன்கள் A-ன் சிறப்பியல்புத் தீர்வு வெக்டர்களாக உள்ளன. இவ்வெக்டர்களை நிரல்களாகக் கொண்ட செங்குத்து அணியால் மாற்றம் செய்தால், $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$ என உருவம் கிடைக்கும் (இதில் λ_1, λ_2, λ_3, A-ன் சிறப்பியல்புத் தீர்வுகள்). இம் முறைக்குத் 'தலைமை அச்சுகளுக்குச் சுருக்குதல்' (Reduction to Principal axes) என்பது பெயர்.

மாதிரி 4 : $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz\ 2zx + 2xy = 1$ என்ற ஓர் இருபடி மேற்பரப்பின் (Quadric) சமன்பாட்டைத் தலைமை அச்சுகளுக்குச் சுருக்கவும்.

இங்கு $a = 3,\ b = 5,\ c = 3,\ f = 1$

$$g = 1,\ h = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

அல்லது $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$

தீர்வுகள் $\lambda = 2,\ 3,\ 6$

ஆகையால் சுருக்கிய உருவம்

$$2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 = 1\ .$$

இதற்கான மாற்றல் சமன்பாடுகளைக் கண்டு பிடிக்கும் வழி :

$\lambda = 2$; சமன்பாடுகள்
$$x + y + z = 0$$
$$x + 3y + z = 0$$
$$x + y + z = 0$$

சிறப்பியல்புத் தீர்வு வெக்டர் $= [-1, 0, 1]$

$\lambda = 3$; சமன்பாடுகள் ;

$$y + z = 0$$
$$x + 2y + z = 0$$
$$x + y \quad = 0$$

சிறப்பியல்புத் தீர்வு வெக்டர் = [1, —1, 1]

$\lambda = 6$; சமன்பாடுகள்

$$-3x + y + z = 0$$
$$x + y + z = 0$$
$$x + y - 3z = 0$$

சிறப்பியல்புத் தீர்வு வெக்டர் = [1, 2, 1]

தரப்படுத்திய தீர்வு வெக்டர்கள் :

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad ; \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$

மாற்றும் அணி $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

மாற்றல் சமன்பாடுகள்:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z'$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'$$

8.8. இரண்டு இருபடி உருவங்களை ஒரே அணி மாற்றத்தால் மூலை விட்ட உருவத்துக்குச் சுருக்கலாம் (Simultaneous reductions of wo Quadratic forms to Diagonal forms)

$X^T A X$; $X'^T B X$ என்பன இரண்டு இருபடி உருவங்கள் என்க.

$A X = \lambda B X$ என்க.

அல்லது $[A - \lambda B] X = 0$

இதற்கு அற்பமல்லாத தீர்வுகள் இருக்க வேண்டுமானால் $|A - \lambda B| = 0$. இதன் தீர்வுகள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ என்க இவைகளுக்குத் தகுந்தாற்போல் தீர்வு வெக்டர்கள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்க. $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகியவைகளை நிரல்களாகக் கொண்ட அணி P என்க.

$$X = P Y, \quad X' = P Y'$$

என்ற மாற்றங்களினால் தேவையான உருவங்கள் கிடைக்கின்றன. இதற்கு அவசியமான நிபந்தனைகள், அதாவது

$P^T A P$, $P^T B P$ ஆகியவைகள் மூலைவிட்ட அணிகள் என்பதை நிரூபிப்போம்.

$$\left(P^T A P\right)_{ij} = X_i^T A X_j \quad \text{———— I}$$

$$\left(P^T B P\right)_{ij} = X_i^T B X_j \quad \text{———— II}$$

$$A X_j = \lambda_j B X_j$$

அல்லது $X_i^T A X_j = \lambda_j X_i^T B X_j$ ———— (1)

(i, j-இவைகளை மாற்றி)

$$X_j^T A X_i = \lambda_i X_j^T B X_i \quad \text{———— (2)}$$

2 ஐ மாற்றம் செய்தால்

$$X_i^T A X_j - \lambda_i X_i^T B X_j \quad \text{———— (3)}$$

(1) — (3) $\quad 0 = (\lambda_j - \lambda_i) X_i^T B X_j$

$i \neq j$ என்றால் $\lambda_j \neq \lambda_i$,

ஆகையால் $X_i^T B X_j = 0$ என ஆகிறது.

ஆனால் $X_i^T B X_j = \left(P^T B P\right)_{ij}$ என்பதால் $P^T B P$ ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகிறது.

இதேபோல $P^T A P$-ம் ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகிறது.

மாதிரி 5 : கீழ்க் கண்ட இரண்டு இருபடி உருவங்களையும், ஒரே அணி மாற்றத்தால், மூலைவிட்ட உருவத்துக்குச் சுருக்கவும்:

(1) $R = x^2 + 5y^3 + 3z^3 - 6xy - 2xz + 6yz$

(2) $S = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 + 10yz + 2xz$

$R:\ a = 1, b = 5, c = 3, f = 3, g = -1, h = -3$

$S:\ a = 2, b = 6, c = 5, f = 5, g = 1, h = 0$

சமன்பாடுகள் : $AX - \lambda BX = 0$

இதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு: $|a_{ij} - \lambda b_{ij}| = 0$

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} 1-2\lambda & -3 & -1-\lambda \\ -3 & 5-6\lambda & 3-5\lambda \\ -1-\lambda & 3-5\lambda & 3-5\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = 1,\ \lambda = -1, 2$ எனக் கிடைக்கின்றன.

$\lambda = 1$; சமன்பாடுகள்

$$\begin{aligned} -x - 3y - 2z &= 0 \\ -3x - y - 2z &= 0 \\ -2x - 2y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

தீர்வு வெக்டர் : (1, 1, —2)

$\lambda = -1$; சமன்பாடுகள் :

$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 0 \\ -3x + 11y + 8z &= 0 \\ 8y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

தீர்வு வெக்டர் : (1, 1, —1)

$\lambda = 2$; சமன்பாடுகள்

$$\begin{aligned} -3x - 3y - 3z &= 0 \\ -3x - 7y - 7z &= 0 \\ -3x - 7y - 7z &= 0 \end{aligned}$$

தீர்வு வெக்டர் : (0, —1, 1)

மாற்றும் அணி $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$P^T AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ஆகையால், முதல் இருபடி உருவம்

$R = -12x'^2 - y'^2 + 2z'^2$ என ஆகிறது.

$$P^T B P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ஆகையால், இரண்டாவது இருபடி உருவம்

$S = 4x'^2 + y'^2 + z'^2$ என ஆகிறது.

இவைகளுக்கான மாற்றும் சமன்பாடுகள்

$X = P X'$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$x = x' + y'$

$y = x' + y' - z'$

$z = -2x' - y' + z'$ என உள்ளது.

8.9. இருபடி உருவம் $X^T A X$-ல் A என்பது உருவத்தின் அணி எனப்படுகிறது. A-ன் தரம் 'r', உருவத்தின் தரம் 'r' எனப்படுகிறது.

இருபடி உருவத்தை மூலைவிட்ட உருவத்துக்கு மாற்றும்பொழுது புதிய உருவத்தில் நேர் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்குக் 'குறி' 'i' (Index) என்பது பெயர்.

மூலைவிட்ட உருவத்தில் நேர் உறுப்புகள், எதிர் உறுப்புகள் ஆகியவைகளின் எண்ணிக்கைகளின் வித்தியாசம் 'திசை இயல்பு' 's' (Signature) எனப்படுகிறது.

உதாரணமாக, மாதிரி 5-ல், R என்ற உருவத்துக்கு தரம் 3, குறி 1, திசை இயல்பு — 1 என இருக்கின்றன.

S என்ற உருவத்துக்கு

தரம் 3, குறி 3, திசை இயல்பு 3 என இருக்கின்றன.

8.10. ஹெர்மீஷியன் உருவங்கள் (Hermitian Forms)

வரையறை : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \overline{x_i}\, x_j \quad (a_{ij} = \overline{a_{ji}})$

என்ற உருவம் 'ஹெர்மீஷியன்' உருவம் எனப்படுகிறது. இதில் குணகங்கள் (a_{rs}), x_1, x_2 ... போன்ற கணியங்கள் எல்லாம் கலப்பெண்கள்.

மூன்று கணியங்களில் 'ஹெர்மீஷியன் உருவம்' பின்வருமாறு :

$$a_{11}\overline{x_1}\, x_1 + a_{22}\overline{x_2}\, x_2 + a_{33}\overline{x_3}\, x_3$$
$$+ a_{12}\overline{x_1}\, x_2 + \overline{a_{12}}\, x_1 \overline{x_2}$$
$$+ a_{23}\overline{x_2}\, x_3 + \overline{a_{23}}\, x_2 \overline{x_3} + a_{13}\overline{x_1}\, x_3$$
$$+ \overline{a_{13}}\, x_1 \overline{x_3}$$

இதை $[\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} & a_{33} \\ \overline{a_{13}} & \overline{a_{23}} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

அல்லது $\overline{X}^T A X$ என எழுதலாம்.

இதில் A ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி.

8.11. ஒரு ஹெர்மீஷியன் உருவத்தில் எல்லா உறுப்புகளும் மெய்யெண்கள்தாம் என்பதைப் பார்ப்போம்.

ஹெர்மீஷியன் அணியில் மூலை விட்டப் பொருள்கள் மெய்யெண்களாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும் என அத்தியாயம் 6-ல் பார்த்திருக்கிறோம்.

[$a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ என்று இருக்க வேண்டுமானால் a_{ii} ஒரு மெய்யெண்ணாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும்.]

$\overline{x_1}\ x_1$, $\overline{x_2}\ x_2$, $\overline{x_3}\ x_3$ என்பவைகள்

$|x_1|^2$, $|x_2|^2$, $|x_3|^2$ ஆதலால் இவைகளும் மெய் எண்கள்.

$a_{12}\overline{x_1}\, x_2$, $\overline{a_{12}}\, x_1 \overline{x_2}$ என்ற உறுப்புகள், ஒன்றுக்கொன்று துணைக் கலப்பெண்கள். ஆகையால் அவைகளின் கூட்டல் ஒரு மெய் எண். இது

போன்ற ஜோடி உறுப்புகள்தாம் எஞ்சி இருக்கின்றன. ஆகையால் ஒரு ஹெர்மீஷியன் உருவத்தின் மதிப்பு மெய் எண் என ஆகிறது.

8. 12. இருபடி உருவங்களைப் போல் ஹெர்மீஷியன் உருவங்களையும் மூலை விட்ட உருவங்களுக்கு அதே போன்ற முறைகளால் மாற்றலாம்.

$\overline{X}^T A X$ ஒரு ஹெர்மீஷியன் உருவம் என்க. —(I)

$X = PY$ என்ற மாற்றத்தை எடுப்போம்.

$$\overline{X} = \overline{P}\ \overline{Y}$$

அல்லது, $\overline{X}^T = \overline{Y}^T \overline{P}^T$. இதை (I)-ல் பிரதியீடு செய்வோம்.

$$\overline{Y}^T \cdot \overline{P}^T A P Y = \overline{Y}^T B Y$$

இதில் $B = \overline{P}^T A P$ என ஆகிறது. B-ம் ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி. ஏனெனின்,

$$\overline{B} = P^T \overline{A}\ \overline{P}$$

$$\overline{B}^T = \overline{P}^T \overline{A}^T P = \overline{P}^T A P = B$$

A-ல் ஒரே விதமான எளிய நிரை, நிரல் செயல்களைச் செய்து அதைச் சுருக்கமான உருவம் $\begin{bmatrix} A_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ என மாற்ற முடியும்.

இது A ஐ, P என்ற அணியால் பின் பெருக்கலும், $\overline{P}^T$ என்ற அணியால் முன் பெருக்கலும் செய்வதற்குச் சமமாகும். ஆகையால், $X = PY$ என்ற மாற்றத்தால், ஹெர்மீஷியன் அணியை மூலைவிட்ட உருவத்துக்கு மாற்றலாம்.

மாதிரி 6 : கீழ்க்கண்ட ஹெர்மீஷியன் உருவத்தை மூலைவிட்ட உருவத்துக்கு மாற்றவும் :

$$-x_1\overline{x_1} + 2x_3\overline{x_3} + (2+3_i)(x_1\overline{x_2}) + (2-3_i)(x_2\overline{x_1})$$
$$+ (4+5_i)(x_2\overline{x_3}) + (4-5_i)(x_1\overline{x_2}) + (3+4_i)(x_3\overline{x_1})$$
$$+ (3-4_i)(\overline{x_3}\, x_1)$$

இந்த உருவத்தின் அணி

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2-3i & 3+4i \\ 2+3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix} \text{ என உள்ளது.}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2-3i & 3+4i \\ 2+3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r_2 + (2+3i)\,r_1$;

$r_3 + (3-4i)\,r_1$;

$$\begin{bmatrix} -1 & 2-3i & 3+4i \\ 0 & 13 & -(2-12i) \\ 0 & -(2+12i) & 27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+3i & 1 & 0 \\ 3-4i & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_2 + (2-3i)\,c_1$;

$c_3 + (3+4i)\,c_1$;

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -(2+12i) \\ 0 & -(2+12i) & 27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+3i & 1 & 0 \\ 3-4i & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3+4i \\ 0 & 1 & [illegible] \; 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r_3 + \dfrac{(2+12i)}{13} r_2$;

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -(2-12i) \\ 0 & 0 & \dfrac{203}{13} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+3i & 1 & 0 \\ \frac{7-22i}{13} & \frac{2+12i}{13} & 1 \end{bmatrix} \times A \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3+4i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_3 + \frac{(2-12i)}{13} c_2$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{203}{13} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+3i & 1 & 0 \\ \frac{7-22i}{13} & \frac{2+12i}{13} & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & \frac{7+22i}{13} \\ 0 & 1 & \frac{2-12i}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இங்கு $P = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & \frac{7+22i}{13} \\ 0 & 1 & \frac{2-12i}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகையால் $X = P\,Y$ என்கிற மாற்றத்தினால், கொடுக்கப்பட்ட ஹெர்மீஷியன் உருவம் கீழ்க்கண்டவாறு மாறுகிறது:

$$-y_1 \overline{y_1} + 13 y_2 \overline{y_2} + \frac{203}{13} y_3 \overline{y_3}$$

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட இருபடி உருவங்களை $X^T A X$ என்ற உருவத்தில் அமைக்கவும்.

(1) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 5x_2x_3 + 6x_3x_1$

(2) $x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_4^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_4 + 4x_2x_3 - 5x_3x_4$

2. கீழ்க்கண்ட அணிகளை, முற்றொருமை அணி மாற்றத்தால் மூலை விட்ட அணிகளாக மாற்றவும்.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

3. கீழ்க்கண்ட இருபடி உருவங்களை வர்க்கங்களின்: ஒருபடிச் சேர்க்கையாக எழுதவும்.

(1) $10x^2 + y^2 + z^2 - 6xy - 2yz + 6zx$

(2) $2x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 8xy + 8yz + 6zx$

4. கீழ்க்கண்ட இருபடி உருவங்களை, செங்குத்து அணி மாற்றத் தால் மூலை விட்ட உருவத்துக்கு மாற்றவும்.

(1) $2x^2 + y^2 - 3z^2 - 8yz - 4zx + 12xy$

(2) $x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz$

5. கீழ்க்கண்ட இரு இருபடி உருவங்களையும் ஒரே அணி மாற்றத் தால் மூலை விட்ட உருவங்களுக்கு மாற்றவும்.

(1) $2x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 2xy - 6xz + 2yz$

(2) $3y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz + 6yz$

6. கீழ்க்கண்ட இருபடி மேற் பரப்புகளைத் தலைமை அச்சுகளுக்குச் சுருக்கவும்.

(1) $3x^2 - 24y^2 + 8z^2 + 16yz - 10zx - 14xy = 1$

(2) $3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy = 1$

7. கீழ்க்கண்டவைகள் ஹெர்மீஷியன் உருவங்களெனக் காண் பிக்கவும்.

(1) $2x_1\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2x_2 + (3+4i)x_1\bar{x}_2 + (3-4i)x_2\bar{x}_1$

(2) $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + (1+2i)x_1\bar{x}_2 + (1-2i)\bar{x}_1x_2$
$+ 3i\,x_2\bar{x}_3 - 3i\,x_3\bar{x}_2 + 4x_3\bar{x}_1 + 4x_1\bar{x}_3$

8. கீழ்க்கண்ட ஹெர்மீஷியன் உருவங்களை மூலை விட்ட உருவங் களுக்கு மாற்றவும் :

(1) $x_1\bar{x}_1 + 2x_2\bar{x}_2 + 3x_3\bar{x}_3 + i\,x_1\bar{x}_2 - i\,x_2\bar{x}_1 - 3i\,\bar{x}_2x_3$
$+ 3i\,\bar{x}_3x_2 + 2i\,x_1\bar{x}_3 - 2i\,\bar{x}_3x_1$

(2) $2x_1\bar{x}_1 + x_3\bar{x}_3 + (4-2i)x_1\bar{x}_2 + (4+2i)x_2\bar{x}_1 +$
$(6+4i)x_3\bar{x}_1 + (6-4i)x_1\bar{x}_3$

9. ஒருபடி மாற்றங்கள்
(Linear Transformations)

9.1. களம் F மீதான, ஓர் அருவ வெக்டர் வெளி V (Abstract Vector Space) -ன் பொருள்களை, அதன் ஓர் ஆதாரக் கணத்தின் பொருள்களின் பிரத்தியேகமான ஒருபடிச் சேர்க்கைகளாக எழுதலாம் என 5ஆம் அத்தியாயத்தில் பார்த்தோம். உதாரணமாக V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் $B = \{ X_1, X_2, \ldots\ldots X_n \}$ என்க.

V ஐச் சார்ந்த எந்தப் பொருள் X ஐயும்,

F ஐச் சார்ந்த $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ என்ற திசையிலிகளால், $X_1, X_2, \ldots \ldots X_n$ ஆகியவைகளின் பிரத்தியேகமான ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கீழ்க் கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots\ldots + \alpha_n X_n.$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j$$

$(\alpha_1 \ \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n)$ என்ற வெக்டரை.

'α' எனக் குறித்தால், α என்பதை ஆதாரக் கணம் B-ன் சார்பாக X-ன் ஆய வெக்டர் (Co-ordinate Vector) எனக் கூறலாம். இதை

'α' $= R [X; \ B]$ என எழுதலாம்.

அதாவது, வெக்டர் α, X ஐ B-ன் சார்பாகக் குறிப்பது என்பது பொருள். ஆதாரக் கணத்தை மாற்றினால் அதே பொருள் X-ன் ஆய வெக்டர் மாறும். புது ஆய வெக்டர், பழைய ஆய வெக்டருடன் ஓர் அணியால் இணைக்கப்பட்டிருக்கும். மேலும் ஒரு வெக்டர் வெளி V-லுள்ள பொருள்களை ஒன்றுக்கொன்றாக $V^{\otimes}$ என்ற வெக்டர் வெளியில் வரைந்தால், பிம்பத்தின் ஆய வெக்டரும் பொருளின்

ஆய வெக்டரும் அணியால் இணைக்கப்பட்டிருக்கும். இவ்விதமாக, ஆய வெக்டர்களின் இணைப்புகளை இந்த அத்தியாயத்தில் பார்க்கிறோம்.

தேற்றம் 9.1.

$B = \{E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots, E_n\}$ என்பது வெக்டர் வெளி V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்க. $\overline{B} = \{\overline{E_1}, \overline{E_2}, \ldots\ldots, \overline{E_n}\}$ என்ற கணம் $E_1, E_2, \ldots E_n$ ஆகியவைகளுடன் கீழ்க் கண்டவாறு இணைப்புக் கொண்டுள்ளன.

$$\overline{E_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} E_i \; (j = 1; 2, \ldots\ldots n)$$

(p_{ij}) என்ற திசையிலிகளாலான அணி P, சிறப்பில்லாத அணியாக இருந்தால் தான் $\overline{B}$-ம் ஓர் ஆதாரக் கணமாகும்.

நிறுவல்:

$$\overline{E_1} = p_{11} E_1 + p_{21} E_2 + p_{31} E_3 + \ldots\ldots\ldots + p_{n1} E_n$$

$$\overline{E_2} = p_{12} E_1 + p_{22} E_2 + p_{32} E_3 + \ldots\ldots\ldots + p_{n2} E_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{E_n} = p_{1n} E_1 + p_{2n} E_2 + p_{3n} E_3 + \ldots\ldots\ldots + p_{nn} E_n$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \overline{E_j} = t_1 \overline{E_1} + t_2 \overline{E_2} + \ldots\ldots\ldots + t_n \overline{E_n}$$

$$= E_1 [p_{11} t_1 + p_{12} t_2 + \ldots\ldots\ldots + p_{1n} t_n]$$

$$+ E_2 [p_{21} t_1 + p_{22} t_2 + \ldots\ldots\ldots + p_{2n} t_n]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ E_n [p_{n1} t_1 + p_{n2} t_2 + \ldots\ldots\ldots + p_{nn} t_n]$$

[மேற்கண்ட வரிகளைப் பின்காணும் சுருக்கமான வழியில் எழுதலாம் :

$$\overline{E_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} E_i \; (j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \overline{E_j} = \sum_{j=1}^{n} t_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} E_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} t_j \Big]$$

$\sum_{j=1}^{n} t_j \overline{E_j} = 0$ என்க.

ஆதலால்,
$$p_{11} t_1 + p_{12} t_2 + \ldots\ldots + p_{1n} t_n = 0$$
$$p_{21} t_1 + p_{22} t_2 + \ldots\ldots + p_{2n} t_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{n_1} t_1 + p_{n_2} t_2 + \ldots\ldots + p_{nn} t_n = 0$$

$| P | = | (p_{rs}) | = 0$ என்க.

அதாவது P, ஒரு சிறப்புள்ள அணி என்க.

$t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n$ ஆகியவைகளுக்கு எல்லாம் பூச்சியமல்லாத தீர்வுகள் உண்டு. ஆகையால் $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots\ldots, \overline{E}_n$ ஒ. ப. சா. கொண்டவை. ஆதலால் இவைகள் V-ன் ஆதாரக் கணமாக இருக்க முடியாது.

$| P | \neq 0$ என்க. இப்பொழுது $t_1 = t_2 = \ldots\ldots = t_n = 0$ என்றுதான் இருக்க முடியும். ஆதலால் $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots \ldots\ldots \overline{E}_n$ ஒ. ப. சா. இல்லாதவை. ஆகையால் இவைகள் மற்றோர் ஆதாரக் கணமாகின்றன.

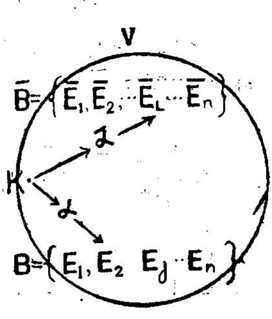
தேற்றம் 9.2.

B, $\overline{B}$—இவைகள் V-ன் இரண்டு ஆதாரக் கணங்கள். $K \in V$. $\alpha = R [K ; B]$; $\overline{\alpha} = R [K, \overline{B}]$ என்றால்

$\overline{\alpha} = P\alpha$ என இருக்குமாறு, சிறப்பில்லாத P என்ற பிரத்தியேகமான ஒரு $(n \times n)$ அணி உள்ளது. மேலும் P, K ஐப் பொருத்ததல்ல.

நிறுவல் :

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n)^{T}$ என்க.



$\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots\ldots \overline{\alpha_n})^{T}$ என்க.

$\alpha = R [K ; B]$

$$\therefore K = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E_j$$

$\overline{\alpha} = R [K; \overline{B}]$

$$\therefore K = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\ \overline{E_i} \qquad \text{——(1)}$$

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\ \overline{E_i}\ (j = 1, 2, \ldots\ldots n) \qquad \text{——(2)}$$

என்க.

$$K = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\ \overline{E_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{E_i} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\alpha_j \qquad \text{——(3)}$$

(1), (3) — இவைகளிலிருந்து

$$\overline{\alpha_i}\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\ \overline{E_i} \quad (i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n)$$

ஆகையால் $\overline{\alpha} = P\alpha$.

(2)-ல் உள்ள தொடர்பு இரண்டு ஆதாரக் கணங்களுக்கிடையே ஆதலால் தேற்றம் 9.1.-ன் படி, P, ஒரு சிறப்பில்லாத அணி. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு ஆதாரக் கணங்களை இணைப்பதால், P, K ஐப் பொருத்ததல்ல.

9·2. ஒருபடி மாற்றம் (Linear Operation or Linear Operator)

V என்ற வெக்டர் அணியிலுள்ள எந்தப் பொருள் K-க்கும் தகுந்தவாறு $L(K)$ என்ற பிரத்தியேகப் பொருள் $V^{\otimes}$ என்ற மற்ருெரு வெக்டர் வெளியில் இருக்குமாஞல் V, $V^{\otimes}$ க்குள் வரையப்படுகிறது என்றும், இந்த மாற்றத்துக்கு, மாற்றம் L என்றும் பெயர். $L(K)$, 'K'-ன் பிம்பம் எனப்படுகிறது. மேலும், கீழ்க்கண்ட இரண்டு தன்மைகள் உண்மையாஞல், 'L'க்கு ஒருபடி மாற்றம் (Linear Transformation) என்பது பெயர்.

$$L(\alpha X) = \alpha L(X)$$

$$L(X+Y) = L(X)+L(Y)$$

அதாவது, (αX)-ன் பிம்பம் $= \alpha(X$-ன் பிம்பம்$)$

மற்றும் $(X+Y)$-ன் பிம்பம் $= (X$-ன் பிம்பம்$) + (Y$-ன் பிம்பம்$)$ இவைகளிலிருந்து, L ஓர் ஒருபடி மாற்றம் என்ருல்,

$L(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k)$
$= \alpha_1 L(X_1) + \alpha_2 L(X_2 + \ldots + \alpha_k L(X_k)$ என ஆகிறது.

மாதிரி 1: V ஐ $V^{\otimes}$ க்குள் மாற்றும் (அல்லது வரையும்) ஒரு படி மாற்றம் L என்றும், 0, $0^{\otimes}$ ஆகியவை V, $V^{\otimes}$ -ன் பூச்சியப் பொருள்கள் என்றும் இருந்தாலும்,

$L(0) = 0^{\otimes}$ என நிறுவுக.

$X \in V$. $\quad 0 \in F$

$0X = 0$

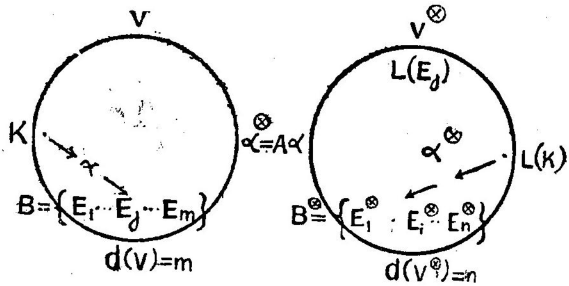
$L(0X) = 0\,L(X) = 0^{\otimes}$

தேற்றம் 9.3.

V ஐ $V^{\otimes}$ க்குள் வரையும் ஒருபடி மாற்றம் L என்க. B, $B^{\otimes}$ ஆகியவை, V, $V^{\otimes}$ -ன் ஆதாரக் கணங்கள் என்க. $K \in V$.

$\alpha = R[K ; B]$; $\alpha^{\otimes} = R[L(K) ; B^{\otimes}]$ என்க.

$\alpha^{\otimes} = A\alpha$ என இருக்குமாறு பிரத்தியேகமாயும், K ஐப் பொருத்துமிராத A என்ற ஒரு $n \times m$ அணி உள்ளது.



நிறுவல் :

$d(V) = m$ என்க.

V-ன் ஆதாரக் கணம் $B = \{E_1, \ldots\ldots, E_j, \ldots\ldots, E_m\}$ என்க.

$d(V^{\otimes}) = n$ என்க.

$V^{\otimes}$-ன் ஆதாரக்கணம் $B^{\otimes} = \{ E_1^{\otimes} \ldots\ldots E_i^{\otimes} \ldots\ldots E_n^{\otimes} \}$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \; \alpha_j \; \alpha_m)^T$$

$$\alpha = R\,[\,K\,;B\,]$$

ஆதலால் $K = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j E_j$ ——(1)

$$\alpha^{\otimes} = (\alpha_1^{\otimes}, \alpha_2^{\otimes} \ldots \alpha_i^{\otimes} \ldots\ldots \alpha_n^{\otimes})^T$$

$$\alpha^{\otimes} = R\,[\,L\,(K)\,;B^{\otimes}\,]$$

ஆதலால் $L\,(K) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\otimes} E_j^{\otimes}$ ——(2)

$L\,(E_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i^{\otimes}$ $(j = 1, 2, \ldots m)$ என்க. ——(3)

$L(K) = L \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \quad E_j \right\}$ .... (1)-ன் படி.

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j L\,(E_j)$$

$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i^{\otimes}$ .... (3)-ன் படி

$$= \sum_{i=1}^{n} E_i^{\otimes} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \alpha_j$$

$= \sum_{i=1}^{n} E_i^{\otimes} \alpha_i^{\otimes}$ .... (2)-ன் படி.

ஆதலால் $\alpha_i^{\otimes} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \alpha_j \; (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$

ஆதலால் $\alpha^{\otimes} = A\alpha$ என ஆகிறது.

$A = (a_{rs})$, $L(E_i)$, $E^{\otimes}$ ஆகியவைகளை இணைப்பதாலும், A பிரத்தியேகமானது; K ஐப் பொருத்ததன்று.

வரையறை : சென்ற தேற்றத்திலுள்ள A என்ற அணி, ஆதாரக் கணங்கள் B, $B^{\otimes}$ -ன் சார்பாக, ஒருபடி மாற்றம் 'L' ஐக் குறிக்கிறது எனப்படும்.

$$\text{அதாவது, } A = R\left[L, B, B^{\otimes}\right]$$

தேற்றம் 9.4.

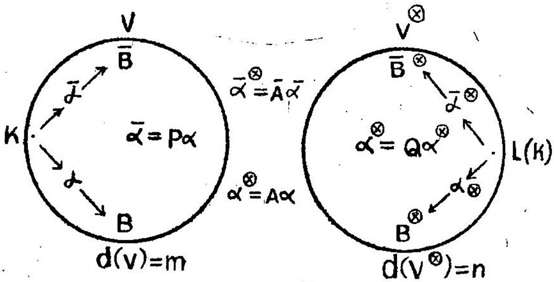
V ஐ $V^{\otimes}$ க்குள் வரையும் ஒருபடி மாற்றம் L என்க.

B, $\overline{B}$ என்பவைகள் V-ன் ஆதாரக் கணங்கள் ; $B^{\otimes}$, $\overline{B}^{\otimes}$ என்பவை $V^{\otimes}$-ன் ஆதாரக் கணங்கள். $A = R\left[L, B, B^{\otimes}\right]$;

$\overline{A} = R\left[L, \overline{B}, \overline{B}^{\otimes}\right]$ என்றால்,

$\overline{A} = QAP^{-1}$ என இருக்குமாறு, P, Q என்ற சிறப்பில்லாத அணிகள் உண்டு.

நிறுவல் :



$K \in V$; $L(K) \in V^{\otimes}$

$\alpha = R\left[K, B\right]$, $\overline{\alpha}^{\otimes} = R\left[L(K) ; B^{\otimes}\right]$

$A = R\left[L ; B, B^{\otimes}\right]$

ஆதலால் $\alpha^{\otimes} = A\alpha$. ————(1)

$$\overline{\alpha} = R\ [K, \overline{B}]; \quad \overline{\alpha}^{\otimes} = R\ [L(K); \overline{B}^{\otimes}]$$

$$\overline{A} = R[L; \overline{B}, \overline{B}^{\otimes}]$$

ஆதலால் $\overline{\alpha}^{\otimes} = \overline{A}\ \overline{\alpha}$ ————(2)

B, $\overline{B}$, V-ன் ஆதாரக் கணங்களானதால், இவைகள் ஒரு $(m \times m)$ சிறப்பில்லாத அணி P ஆல் இணைக்கப்படுகின்றன.

ஆதலால் $\overline{\alpha} = P_{\alpha}$ ————(3)

$B^{\otimes}$, $\overline{B}^{\otimes}$, $V^{\otimes}$-ன் ஆதாரக் கணங்களானதால் இவைகள் ஒரு $(n \times n)$ சிறப்பில்லாத அணி Q ஆல் இணைக்கப்படுகின்றன.

ஆதலால் $\overline{\alpha}^{\otimes} = Q\alpha^{\otimes}$ ————(4)

$\overline{\alpha}^{\otimes} = Q\alpha^{\otimes}$ ....(4)-ன் படி

$= QA\alpha$ ....(1)-ன் படி

$= QAP^{-1}\overline{\alpha}$ ....(3)-ன் படி

ஆனால் $\overline{\alpha}^{\otimes} = \overline{A}\ \overline{\alpha}$ ....(2)-ன் படி

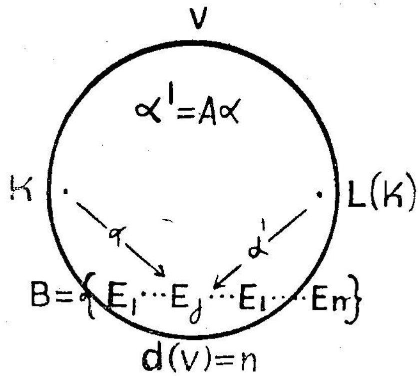
ஆதலால் $\overline{A} = QAP^{-1}$.

[ஏனெனின், A, B, $(m \times m)$ அணிகளாயும், எல்லா அணிகள் X க்கும், $AX = BX$ எனவு ் இருக்குமானால் $A = B$ என ஆகிறது.]

தேற்றம் 9.5.

V ஐத் தனக்குள்ளேயே வரையும் ஒருபடி மாற்றம் L என்க. B, V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்க. $K \in V$; $L(K) \in V$. $\alpha = R[K; B]$; $\alpha' = R[L(K), B]$ என்க, $\alpha' = A\alpha$ என இருக்குமாறு பிரத்தியேகமாயும், K ஐப் பொருத்துமிராத A என்ற $(n \times n)$ அணி உண்டு.

நிறுவல் :



$$L(E_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i;$$

$(j = 1, 2, \ldots n)$

என்க.——(1)

$\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n)^T$ என்க.

$$\alpha = R[K, B]$$

$$\therefore\ K = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E_j \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$\alpha' = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots\ldots\ldots \alpha_n')$ என்க.

$$\alpha' = R[L(K), B]$$

$$\therefore L(K) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' E_i \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$L(K) = L\left\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j E_j\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j L(E_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' E_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\text{-ன் படி.}$$

ஆதலால், $\alpha_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_j \qquad [\, i = 1, 2, \ldots\ldots_n \,]$

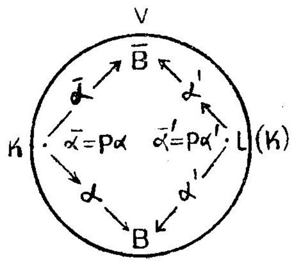
ஆதலால் $\alpha' = A\alpha.$

(1)-ன்படி, A என்ற அணி $L\,(E_j)$; E_i ஆகியவைகளை இணைப்பதால், அது ஒரு பிரத்தியேகமாயும், V-ஐப் பொருத்தில்லாமலும் இருக்கும் $(n \times n)$ அணி. $A = R\,[L\,;\;B]$ எனப்படும்.

தேற்றம் 9.6.

V ஐத் தனக்குள்ளாகவே வரையும் ஒருபடி மாற்றம் L என்க. B, $\overline{B}$ ஆகியவைகள் V-ன் இரண்டு ஆதாரக் கணங்கள் என்க. $A = R\,[\,L, B\,]$; $\overline{A} = R\,[\,L, \overline{B}\,]$ என்க. A, $\overline{A}$ இரண்டும் வடிவொத்த அணிகள் (Similar matrices) ஆகின்றன.

நிறுவல் :



$\alpha = R\,[K\,;\,B]$

$\alpha^1 = R\,[L\;(K);\;\;B]$

$A = R\,[L,\;\;B]$

ஆதலால் $\alpha^1 = A\,\alpha$ —— (1)

$\overline{\alpha} = R\,[K\,;\,\overline{B}]$

$\overline{\alpha}' = R\,[\,L\;(K)\,;\;\overline{B}]$

$\overline{A} = R\,[\,L,\;\;\overline{B}]$

ஆதலால் $\overline{\alpha}' = \overline{A}\;\overline{\alpha}$ ——(2)

B, $\overline{B}$ ஆகியவைகள் V-ன் இரண்டு ஆதாரக் கணங்கள் ஆகையால் இவைகளை இணைக்கும் ஒரு $(n \times n)$ சிறப்பில்லாத அணி P உண்டு.

ஆதலால் $\overline{\alpha} = P\,\alpha$ —— (3)

மற்றும், $\overline{\alpha}' = P\,\alpha'$ —— (4)

$\overline{\alpha}' = P\,\alpha'$ .... (4)-ன் படி

$= P\,A\,\alpha$ .... (1)-ன் படி

$= P\,A\,P^{-1}\,\overline{\alpha}$ .... (3)-ன் படி

$= \overline{A}\;\overline{\alpha}$ .... (2)-ன் படி

ஆதலால் $\overline{A} = P\,A\,P^{-1}$

$= (P^{-1})^{-1}\,A\,P^{-1}$

ஆகையால் $\overline{A}, A$ என்பவை வடிவொத்த அணிகள்.

9.3. இதுவரை, இந்த அத்தியாயத்தில் அருவமான வெக்டர்களைப் பார்த்தோம். பின்வரும் ஒரு தேற்றத்தில் உருவமுள்ள வெக்டர்களைக் கருதுவோம். அதாவது ஒரு வெக்டர் $X \in V_n$ என்றால்,

$$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n) \text{ என்ற உருவம் கொண்டது.}$$

மேலும் V_n-ல், கீழ்க்கண்ட ஒரு சிறப்பான ஆதாரக் கணமுள்ளது. (Special basis).

$$E = [e_1, e_2, \ldots\ldots\ldots, e_n]$$

இதில்
$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots\ldots\ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots\ldots\ldots, 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = (0, 0, 0 \ldots\ldots\ldots, 1)$$

மேலும் எந்த வெக்டர் X ஐயும்,

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots\ldots + x_n e_n$$ என எழுதலாம்,

தேற்றம் 9.7.

V_n என்பது உருவமுள்ள, M வரிசை எண் உடைய முழு வெக்டர் வெளி என்க. இதில் E சிறப்பான ஆதாரக் கணம் என்க. $B = [X_1, X_2, \ldots\ldots, X_j, \ldots\ldots, X_n]$ என்பது V_n-ன் மற்றோர் ஆதாரக் கணம் என்க. $X_1, X_2, \ldots X_n$ ஆகியவைகளையே நிரல்களாக உடைய அணி P என்க. V_n-ஐத் தனக்குள்ளாகவே வரையும் ஒரு படி மாற்றம் L என்க. $A = R [L, E]$ என்றால் $P^{-1}AP = R [L, B]$ என ஆகும்.

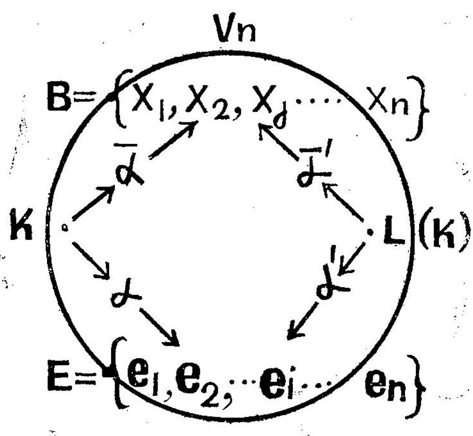
$$X_j = (x_{1j}, x_{2j} \ldots\ldots x_{jj} \ldots\ldots x_{nj})^T \text{ என்க.}$$

ஆதலால்

$$X_j = x_{1j} e_1 + x_{2j} e_2 + x_{ij} e_i + \ldots + x_{nj} e_n.$$

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$$

$$(j = 1, 2, \ldots n)$$



$\alpha = R[K, E] : \ \overline{\alpha} = R[K, B]$

ஆதலால் $\alpha = P\overline{\alpha}$ .... (தேற்றம் 9·2)———(1)

இதில் $P = (x_{rs})$. இதில் j என்ற நிரல்

$(x_{1j}, x_{2j}, \ldots\ldots\ldots x_{nj})^{T} = X_j$.

இதேபோல $\alpha' = P\overline{\alpha}'$ ———(2)

$A = R[L, E]$ என்க.

ஆதலால் $\alpha' = A\alpha$ ———(3)

$\overline{A} = R[L, B]$ என்க.

ஆதலால் $\overline{\alpha'} = \overline{A}\ \overline{\alpha}$ ———(4)

$\overline{\alpha}' = P^{-1}\alpha'$ .... (2)-ன் படி

$= P^{-1}A\alpha$ .... (3)-ன் படி

$= P^{-1}AP\overline{\alpha}$ .... (1)-ன் படி

$= \overline{A}\ \overline{\alpha}$ ....(4)-ன் படி

ஆதலால் $\overline{A} = P^{-1}AP$.

மாதிரி 2: V_2 என்ற கலப்பெண் வெக்டர் வெளி தனக்குள்ளாகவே, L என்ற ஒருபடி மாற்றத்தால் வரையப்படுகிறது.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} L & E \end{bmatrix}$$

(இதில் E, சிறப்பான ஆதாரக் கணம்.)

$(1, i), (1, -i)$—இவைகளைப் பொருளாகக்கொண்ட ஆதாரக் கணம் B என்க. L ஐ B-ன் சார்பாகக் குறிக்கும் அணியைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$B = (X_1, X_2)$

$X_1 = (1, i)\ ;\ \ X_2 = (1, -i)$

ஆதலால், $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$\overline{A} = P^{-1}AP$ ————→ தேற்றம் 9·7

$$\frac{A^{\otimes}}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}}{-2i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+ib & a-ib \\ -b+ia & b-ia \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix}$$

9.4. வரையறை :

V ஐ $V^{\otimes}$-ல் வரையும் ஓர் ஒருபடி மாற்றம் L, கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டு ஒரு மேல் வரைதல் எனப்படுகிறது.

$V^{\otimes}$-ல் உள்ள எந்தப் பொருளையும் பிம்பமாக உடைய பொருள் ஒன்றேனும் V-ல் இருத்தல் வேண்டும்.

மேல் வரைதல், V, $V^{\otimes}$ ஆகியவைகளுக்குள் 'ஒரே அமைப்புத் தன்மை'யை (Isomorphism) உண்டாக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை. ஒரே அமைப்புத் தன்மையில், V-ன் பொருள்களுக்கும், $V^{\otimes}$-ன் பொருள்களுக்குமிடையே ஒன்றுக்கொன்றுன பிரத்தியேக இணைப்பு இருத்தல் வேண்டும்.

தேற்றம் 9.8.

V, $V^{\otimes}$ என்ற வெக்டர் வெளிகள் ஒரே பரிமாணம் கொண்டவை. L என்பது, V, $V^{\otimes}$-ன் மேல் வரைதலான ஒருபடி மாற்றம் என்றால், V, $V^{\otimes}$ ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை.

நிறுவல் : $d(V) = d(V^{\otimes}) = n$ என்க.

$\{E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, E_n\}$, V-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம் என்க. $V^{\otimes}$ ஐச் சார்ந்த எந்தப் பொருள் X' ஐயும் பிம்பமாக உடைய பொருள் X ஒன்றுவது V-ல் உள்ளது. அதாவது $L(X) = X'$.

$X = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n E_n$ என்க.

$X' = L(X) + \alpha_1 L(E_1) + \alpha_2 L(E_2) + \ldots\ldots + \alpha_n L(E_n)$

இதேபோல, $V^{\otimes}$ ஐச் சார்ந்த எந்தப் பொருளும் $L(E_1), L(E_2), \ldots\ldots, L(E_n)$ என்பவைகளால் பிறப்பிக்கப்படுவதாலும், $\alpha(V^{\otimes}) = n$ என்பதாலும் $L(E_1), L(E_2) \ldots\ldots L(E_n)$, $V^{\otimes}$-ன் ஓர் ஆதாரக் கணமாகும். ஆகையால் இவைகள் ஒ.ப.சா. இல்லாதவை.

$V^{\otimes}$ ஐச் சார்ந்த Y^1 என்ற பொருளை எடுப்போம். Y^1 ஐப் பிம்பமாக உடைய இரண்டு பொருள்கள் Y_1, Y_2, V-ல் இருப்பதாகக் கருதுவோம்.

அதாவது

$$L(Y_1) = Y'$$
$$L(Y_2) = Y'.$$

$Y_1 = \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \ldots\ldots\ldots + \beta_n E_n$ என்க.

$Y_2 = \gamma_1 E_1 + \gamma_2 E_2 + \ldots\ldots\ldots + \gamma_n E_n$ என்க.

$$Y' = L(Y_1) = \beta_1 L(E_1) + \beta_2 L(E_2) + \ldots\ldots + \beta_n L(E_n)$$
$$Y' = L(Y_2) = \gamma_1 L(E_1) + \gamma_2 L(E_2) + \ldots\ldots + \gamma_n L(E_n)$$

ஆதலால் $O' = (\beta_1 - \gamma_1) L(E_1) + (\beta_2 - \gamma_2) L(E_2) + \ldots + (\beta_n - \gamma_n) L(E_n)$

$L(E_1), \ldots\ldots\ldots L(E_n)$ ஓர் ஆதாரக் கணமானதால்

$$\beta_1 - \gamma_1 = \beta_2 - \gamma_2 = \ldots\ldots\ldots = 0$$

ஆதலால் $\beta_1 = \gamma_1$; $\beta_2 = \gamma_2$; $\ldots$; $\beta_n = \gamma_n$

ஆதலால் $Y_1 = Y_2$. ஆதலால் X'க்குத் தகுந்த பொருள் ஒன்று தான் V-லுள்ளது. ஆதலால் V, $V^{\otimes}$ என்பவைகள் ஒரே அமைப்புக் கொண்டவை.

9.5. வரையறை : V தனக்குள்ளாகவே ஒரே அமைப்புக் கொண்டதாக மேல் வரையப்பட்டால் இந்த வரைதலுக்குத் தானே அமையும் ஒரே அமைப்பு மாற்றம் (Automorphism) என்பது பெயர்.

மாதிரி 3 : V_2 தனக்குள்ளாகவே, $(x_1 \; x_2) \leftrightarrow (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2)$ என்ற இணைப்புக் கொண்ட ஒருபடி மாற்றம் 'தானே அமையும் ஒரே அமைப்பு மாற்றம்' எனக் காண்பிக்கவும்.

$$(x_1 \; x_2) \in V_2 \; ; \quad (x + x_2, \; x_1 - 2x_2) \in V_2$$

மேலும், இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று பிரத்தியேக இணைப்புக் கொண்டவை. அதாவது

$$L(x_1\ x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1 - 2x_2)$$
$$\alpha(x_1\ x_2) = (\alpha x_1,\ \alpha x_2)$$
$$\begin{aligned} L[\alpha(x_1, x_2)] &= L(\alpha x_1, \alpha x_2) \\ &= [\alpha x_1 + \alpha x_2,\ \alpha x_1 - 2\alpha x_2] \\ &= \alpha[x_1 + x_2,\ x_1 - 2x_2] \\ &= \alpha L(x_1, x_2) \end{aligned}$$
$$(x_1\ x_2) + (y_1\ y_2) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$$
$$\begin{aligned} L[(x_1\ x_2) + (y_1\ y_2)] &= L[x_1 + y_1,\ x_2 + y_2] \\ &= [x_1 + y_1 + x_2 + y_2,\ \ x_1 + y_1 - 2x_2 - 2y_2] \\ &= [(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2),\ \ (x_1 - 2x_2) + (y_1 - 2y_2)] \\ &= [x_1 + x_2,\ x_1 - 2x_2] + [y_1 + y_2,\ y_1 - 2y_2] \\ &= L(x_1\ x_2) + L(y_1\ y_2) \end{aligned}$$

ஆகையால், L என்பது V_2-ன் தானே அமையும் ஒரே அமைப்பு மாற்றம்.

மாதிரி 4 : V_3-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம்

$$(1,\ 1,\ \tfrac{2}{3}),\ (2,\ -1,\ -1),\ (3,\ 2,\ \tfrac{1}{2})$$

V_2-ன் ஓர் ஆதாரக் கணம்

$$(3,\ 1),\ (1,\ \tfrac{5}{2}).$$

L என்ற ஒருபடி மாற்றம் V_3-ன் பொருள்களை V_2-ன் பொருள்களாகக் கீழ்க்கண்ட விதம் மாற்றுகிறது :

$$L(x_1,\ x_2,\ x_3) = [x_1 - x_2,\ 2x_2 - 3x_3]\ ;$$

L ஐ மேற்கூறிய ஆதாரக் கணங்களின் சார்பாகக் குறிக்கும் அணியைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$\begin{aligned} L(1,\ 1,\ \tfrac{2}{3}) &= (0,\ 0) \\ L(2, -1, -1) &= (3,\ 1) \\ L(3,\ 2,\ \tfrac{1}{2}) &= (1,\ \tfrac{5}{2}) \end{aligned}$$

$$(0,\ 0) = p_{11}(3,\ 1) + p_{21}(1,\ \tfrac{5}{2})$$
$$\therefore\ 3p_{11} + p_{21} = 0$$
$$p_{11} + \tfrac{5}{2}\,p_{21} = 0$$
$$\therefore\ p_{11} = 0,\ p_{21} = 0$$

$$(3, 1) = p_{12}(3, 1) + p_{22}(1, \tfrac{5}{2})$$
$$\therefore 3p_{12} + p_{22} = 3$$
$$p_{12} + \tfrac{5}{2}p_{22} = 1$$
$$\therefore p_{12} = 1, \quad p_{22} = 0$$

$$(1, \tfrac{5}{2}) = p_{13}(3, 1) + p_{23}(1, \tfrac{5}{2})$$
$$3p_{13} + p_{23} = 1$$
$$p_{13} + \tfrac{5}{2}p_{23} = \tfrac{5}{2}$$
$$\therefore p_{13} = 0, \quad p_{23} = 1$$

தேற்றம் 9.3.-ன்படி, தேவையான அணி

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.6. வரையறை:

ஓர் ஒருபடி மாற்றம் 'L'-ன் அணி A, V என்ற வெக்டர் வெளியிலுள்ள வெக்டர்களை V' என்ற வெக்டர் வெளியிலுள்ள வெக்டர்களாக மாற்றினால் V என்பது இம்மாற்றம், 'L'ன் அரங்கம் (Domain) என்றும், இம்மாற்றத்தால் V'-ல் கிடைக்கும் வெக்டர் உள் வெளிக்கு, மாற்றத்தின் வீச்செல்லை (Range) என்றும் பெயர்.

$A X = 0$ எனக் கிடைக்குமாறு, V-ல் உள்ள பொருள்கள் X, ஓர் உள் வெளியை உருவாக்கும். இந்த உள் வெளிக்கு 'L'-ன் பூச்சிமை வெளி (Null Space of L) என்பது பெயர்.

உதாரணம்: சென்ற மாதிரியில் $(x_1\ x_2\ x_3)$ போன்ற வெக்டர்களால் உருவாகும் முழு வெக்டர் வெளி V_3, 'L'-ன் அரங்கம் ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட ஆதாரக் கணங்களின் சார்பாக, 'L'-ன் அணி $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனப் பார்த்தோம்.

ஆகையால் $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$(x_2\ x_3)$, வெக்டர் வெளி V_2-ன் ஒரு பொருள். V_3-ல், x_1, x_2, x_3 ஆகியவைகள் எல்லா மதிப்புகளையும் பெறுவதால், $(x_2\ x_3)$, V_2-ல்

உள்ள எல்லா வெக்டர்களுமாக ஆகின்றன. ஆகையால், V_2, L-ன் வீச்செல்லை ஆகிறது.

மேலும் V_3 -ன் $(x_1, 0, 0)$ போன்ற வெக்டர்கள் V_2-ல் $(0, 0)$ என மாறுகின்றன, ஆதலால் $(x_1, 0, 0)$ போன்ற வெக்டர்கள், L-ன் பூச்சிமை வெளியாகின்றன.

பயிற்சி

1. V ஐ $V^{\otimes}$ க்குள் வரையும் ஒருபடி மாற்றம் L என்க. $O^{\otimes}$, $V^{\otimes}$ -ன் பூச்சியப் பொருள். $L(X) = O^{\otimes}$ என இருக்கும். V ஐச் சார்ந்த எல்லா X-ம், V-ன் ஓர் உள்வெளி எனக் காட்டவும்.

2. ஒரு வெக்டர் வெளியை மற்றொரு வெக்டர் வெளியின் மேலாக வரையும் ஓர் ஒருபடி மாற்றம், பொருள்களின் ஒ. ப. சா. கொள்ளும் தன்மையைக் காக்கிறது; ஆனல் பொருள்களின் ஒ. ப. சா. கொள்ளாத தன்மையைக் காக்கவில்லை எனக் காண்பிக்கவும்.

3. V_3 ஐத் தனக்குள் வரையும் ஒருபடி மாற்றம் L என்க.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

என்ற அணி L ஐ, $[(-1, 1, 1); (1, 0, -1); (0, 1, 1)]$ என்ற ஆதாரக் கணத்தின் சார்பாகக் குறிக்கிறது. L ஐ $[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$ என்ற சிறப்பு ஆதாரக் கணத்தின் சார்பாகக் குறிக்கும் அணியைக் காணவும்.

4. V_3 ஐத் தனக்குள் வரையும் ஒருபடி மாற்றம் 'L' என்க. L, $(-1, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$, $(3, -1, 0)$ என்ற வெக்டர்களை, $(-5, 0, 3)$, $(0, -1, 6)$ $(-5, -1, 9)$ என்ற வெக்டர்களாக மாற்றுகிறது. இம்மாற்றத்தை (i) சிறப்பான ஆதாரக் கணம், E-ன் சார்பாகவும் (ii) முதல் மூன்று வெக்டர்களாலான ஆதாரக் கணத்தின் சார்பாகவும் குறிக்கும் அணிகளைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

5. கீழ்க்கண்ட மாற்றங்கள் ஒருபடி மாற்றங்கள் எனக் காண்பிக்கவும்: (1) $L(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, x_2)$ (2) $L(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, x_1 - 3x_2)$

10. அணிக்கோவைகள்

(Determinants)

10.1. அணிகளைப்போல, அணிக்கோவைகளும் ஒருபடிச் சமன் பாடுகளின் ஆராய்ச்சியிலிருந்து உருவான கருத்துகள்தாம். பிறகு, கணிதத்தின் பல பாகங்களிலும், அணிக்கோவைகள் பயன்படுகின் றன. அணிகளின் கருத்திலிருந்து அணிக்கோவைகளின் கருத்தைப் பெற்று, இவைகளின் சில தன்மைகளை இந்த அத்தியாயத்தில் பார்ப்போம்.

உதாரணமாக, கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளை எடுப்போம்:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= b_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{I}$$

இச்சமன்பாடுகளின் அணி

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ எனப் பார்த்திருக்கிறோம்.

I என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைச் சாதாரண முறையில் கண்டு பிடித்தால்,

$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})\, x_1 = b_1 a_2 - b_2 a_{12}$ எனக் கிடைக்கும்.

இதில் x_1-ன் குணகம் $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

இதேபோல, x_2-ன் தீர்வு கண்டால், அதன் குணகமும் $a_{11} a_{22} - a_{12} a_2$ எனக் கிடைக்கும் என்று பார்க்கலாம்.

"$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$" என்ற கோவை அணி A-ன் அணிக்கோவை (Determinant), $|A|$ எனப்படுகிறது.

$$|A| = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

இந்தக் கோவையில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் அணியிலுள்ள இரண்டு பொருள்களின் பெருக்கல் பலனாக உள்ளது. பொருள்களின் கீழ்க்குறிகளைக் (Suffixes) கவனித்தால் ஒவ்வொரு பெருக்கலிலும் அணியின் ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்து ஒரு பொருளும், ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்து ஒரு பொருளும் சேர்ந்திருப்பது தெரியும். மேலும், காரணிகளில், முதல் குறிகள் இயற்கையான வரிசையிலும் இரண்டாவது குறிகள் வரிசை மாற்றங்களாகவும் அமைந்துள்ளன. S_2 என்ற சமச்சீர்க் குலத்தில் எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் உள்ளனவோ அத்தனை உறுப்புகள் அணிக்கோவையில் உள்ளன. மேலும் ஓர் உறுப்பு நேராகவும், ஓர் உறுப்பு எதிராகவும் உள்ளன.

மற்றோர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

இவைகளின் அணி

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும்போது, x_1, x_2, x_3 என்பவைகளின் பொதுவான குணகம் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கும் என்பதைச் சரி பார்க்கலாம்.

$$a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

இக்கோவை A-ன் அணிக்கோவை $|A|$ எனப்படுகிறது. உறுப்புகளில் மும்மூன்று காரணிகள் உள்ளன. இவைகள் அணியின் ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்து ஒன்றும், ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்து ஒன்றுமாக உள்ளன. ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் முதல் குறிகள் இயற்கையான வரிசையில் உள்ளன. இரண்டாவது குறிகள் 1, 2, 3 என்பவைகளின் வரிசை மாற்றங்களாக உள்ளன. சமச்சீர்க் குலம் S_3-ல் உள்ள $\underline{|3} = 6$ வரிசை மாற்றங்களுக்குத் தகுந்தாற்போல் இங்கும் 6 உறுப்புகள் உள்ளன. S_3-ல் உள்ள இரட்டை வரிசை மாற்றங்களுக்குத் தகுந்த இங்குள்ள உறுப்புகள் நேராகவும், S_3-ல் உள்ள ஒற்றை வரிசை மாற்றங்களுக்குத் தகுந்த இங்குள்ள உறுப்புகள் எதிராகவும் உள்ளன. உதாரணமாக,

$a_{12} a_{23} a_{31}$ என்ற உறுப்பை எடுப்போம்.

இதற்குத் தகுந்த வரிசை மாற்றம் $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

இதை (1 2 3) என்ற சுழல் வரிசை மாற்றமாக எழுதலாம். இதை (1 3) (2 3) என்று இரண்டு பரிமாற்றங்களின் (Transposition) பெருக்கலாக எழுதலாம். ஆகையால் இந்த வரிசை மாற்றம் இரட்டை மாற்றமாகிறது. இந்த உறுப்பு நேராக உள்ளது.

$-a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$ என்ற உறுப்பை எடுப்போம். இதற்குத் தகுந்த வரிசை மாற்றம் $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ என்பதாகும்.

இதை (1 2) என்ற சுழல் வரிசை மாற்றமாக எழுதலாம். இதில் ஓரே பரிமாற்றமுள்ளதால் இது ஓர் ஒற்றை வரிசை மாற்றம். இதன் திசை எதிராக உள்ளது. இதுபோல மூன்று உறுப்புகள் நேராகவும், மூன்று உறுப்புகள் எதிராகவும் உள்ளன.

ஒரு வரிசை மாற்றம் α-ன் திசையைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கலாம்.

$$\text{திசை } \alpha = \begin{cases} +1, & \alpha \text{ ஓர் இரட்டை வரிசை மாற்றமானால்} \\ -1, & \alpha \text{ ஓர் ஒற்றை வரிசை மாற்றமானால்} \end{cases}$$

இந்த வரையறையின்படி, மேற்கூறிய அணிக்கோவையை

$$|A| = \sum_{\alpha \in S_3} (\text{திசை } \alpha)\, a_{1,1\alpha}\, a_{2,2\alpha}\, a_{3,3\alpha}$$ என எழுதலாம்.

ஒவ்வோர் உறுப்பிலும், காரணிகளின் முதல் குறிகள் இயற்கை வரிசையிலும், இரண்டாவது குறிகள் α-ல் உள்ள வரிசை மாற்றங்களாகவும் உள்ளன.

10.2. அணிக்கோவையின் பொதுவான வரையறை :

A என்பது, களம் F மீதான ஒரு $(n \times n)$ அணியானால், A-ன் அணிக்கோவை

$$|A| = \sum_{\alpha = S_n} (\text{திசை } \alpha)\, a_{1\,1\alpha}\, a_{2\,2\alpha} \ldots\ldots\ldots a_{nn\alpha}$$

[S_n என்பது n வரிசை எண் உள்ள சமச்சீர்க் குலம்.]

ஆகையால் $|A|$-ல், $\underline{|n}$ உறுப்புகள் உள்ளன என்றும், S_n-ல் $\frac{|n}{2}$ இரட்டை வரிசை மாற்றங்களும், $\frac{|n}{2}$ ஒற்றை வரிசை மாற்றங்களும் உள்ளன என்பதால் $|A|$-ல் பாதி உறுப்புகள் நேராகவும், பாதி உறுப்புகள் எதிராகவும் உள்ளன.

மாதிரி 1: A என்பது ஒரு (5×5) அணி. $|A|$-ல் உள்ள கீழ்க்கண்ட உறுப்புகளின் திசைகள் என்ன ?

(1) $a_{15}\, a_{24}\, a_{33}\, a_{42}\, a_{51}$

(2) $a_{13}\, a_{21}\, a_{32}\, a_{45}\, a_{54}$

(1) இந்த உறுப்புக்குத் தகுந்த வரிசை மாற்றம்

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

இதை (15) (24) என்ற இரண்டு பரிமாற்றங்களின் பெருக்கலாக எழுதலாம். ஆதலால் இதன் திசை நேராக உள்ளது.

(2) இந்த உறுப்புக்குத் தகுந்த வரிசை மாற்றம்

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

இதை (1 3 2) (4 5)

= (1 2) (3 2) (4 5) என்ற மூன்று பரிமாற்றங்களின் பெருக்கலாக எழுதலாம். ஆகையால் இந்த உறுப்பின் திசை எதிராக உள்ளது.

10.3.

அணிக்கோவையின் சில தன்மைகளைப் பார்ப்போம் :

தன்மை 1. A^{T}, A என்ற சதுர அணியின் மாற்றல் அணியானால் $\left|A^{T}\right| = |A|$.

நிறுவல்:

$A = (a_{ij})$; $(i, j = 1, 2, \ldots n)$

$A^{T} = (b_{ij})$; $(i, j = 1, 2, \ldots n)$

இதில் $b_{ij} = a_{ji}$

$$\left|A^{T}\right| = \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, b_{1\,1\alpha}\; b_{2\,2\alpha} \ldots b_{n\,n\alpha}$$

இதில் கீழ்க் கண்ட ஓர் உறுப்பை எடுப்போம் ;

$(\text{திசை } \alpha)\, b_{11\alpha}\ b_{22\alpha} \ldots\ldots b_{nn\alpha}$. —— (1)

இதில் காரணிகளை எப்படி மாற்றினாலும் பெருக்கல் பலன் மாறுவதில்லை.

$\beta = \alpha^{-1}$ என்ற α-ன் எதிர் வரிசை மாற்றத்தை எடுப்போம். அதாவது $\beta\alpha = \in$. (1) ல் காரணிகளில் முதல் குறிகள் $_1\beta$, $_2\beta$ ...... என இருக்குமாறு எழுதுவோம்.

$(\text{திசை } \alpha)\,(b_{1\beta\ _1\beta\alpha}\ b_{2\beta\ _2\beta\alpha} \ldots\ldots)$ —— (2)

α, α^{-1}—இவைகளில் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள பரிமாற்றங்கள் தாம் உண்டு என்பதாலும், $\beta\alpha = \in$ என்பதாலும் (2) ஐ

$(\text{திசை } \beta)\ b_{1\beta_1}\ b_{2\beta_2} \ldots\ldots$ என எழுதலாம். —— (3)

$= (\text{திசை } \beta)\ a_{1,\ _1\beta}\ a_{2,\ _2\beta}\ \ldots\ a_{n n\beta}$ என ஆகிறது.

ஆகையால் $\left| A^{T} \right| = \sum_{\beta \in S_n} (\text{திசை } \beta)\, a_{11\beta}\, a_{22\beta} \ldots\ldots a_{nn\beta}$

[α, S_n -ன் மேல் பரவும் பொழுது β-ம் S_n -ன் மேல் பரவுகிறது.]

ஆகையால் $\left| A^{T} \right| = \left| A \right|$

தன்மை 2. A என்ற அணியில் இரண்டு நிரைகளை (நிரல்களை)ப் பரிமாற்றம் செய்தால் கிடைப்பது B என்ற அணி என்க. இப்பொழுது $|B| = -|A|$.

நிறுவல்: A என்ற அணியில், k, l வரிசையிலுள்ள இரண்டு நிரைகளைப் பரிமாற்றம் செய்வோம். ($k < l$ என்க). புதிய அணி B என்க. $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ என்றால்,

$i \neq k$, $i \neq l$ என்று உள்ள போது $b_{ij} = a_{ij}$ என்றும், $b_{kj} = a_{lj}$, $b_{lj} = a_{kj}$ என்றும் உள்ளன.

$$|B| = \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, b_{11\alpha} \ldots b_{kk\alpha} \ldots b_{ll\alpha} \ldots b_{nn\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, a_{11\alpha} \ldots b_{lk\alpha} \ldots a_{kl\alpha} \ldots b_{nn\alpha}$$

இதில் ஓர் உறுப்பை எடுப்போம்.

இதில் முதல் குறிகள் இயற்கையான வரிசையில் இருப்பதற்கு $a_{lk\alpha}$, $a_{kl\alpha}$ இவைகளைப் பரிமாற்றம் செய்வோம். இதனால், பின்குறிகளில் ஒரு பரிமாற்றம் ஏற்படுகிறது. ஆதலால் α என்ற வரிசை மாற்றத்திலுள்ள பரிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை ஒன்றினால்

உயர்த்துகிறோம். ஆதலால் இந்த உறுப்பின் திசை மாறுகிறது. இதே போல எல்லா உறுப்புகளின் திசைகளும் மாறுகின்றன.

ஆதலால் $|B| = -|A|$

தன்மை 3. A என்ற அணியில் இரண்டு நிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) முற்றொருமைகளாக இருந்தால்

$$|A| = 0 \text{ என ஆகிறது.}$$

நிறுவல் : A என்ற அணியில் r, s வரிசை உடைய நிரைகள் முற்றொருமைகள் (Identical) என்க. இவைகளைப் பரிமாற்றம் செய்த அணி B என்க.

$$|B| = -|A| \text{ ....தன்மை (2)}$$

ஆனால், r, s வரிசையுள்ள நிரைகள் முற்றொருமைகளானதால், அவைகளைப் பரிமாற்றம் செய்வதால் A மாறுவதில்லை.

$$\text{ஆகையால் } |B| = |A|$$

ஆதலால் $|A| = -|A|$

ஆதலால் $|A| = 0$ என ஆகிறது.

தன்மை 4. ஓர் அணி A-ல் உள்ள எந்த நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள பொருள்களை ஒரே திசையிலி எண் r ஆல் பெருக்கி C என்ற அணி கிடைத்தால் $|C| = r|A|$ என ஆகிறது.

A-ன், k வரிசை உள்ள நிரையை 'r' ஆல் பெருக்குவதாக வைப்போம்.

$C = (c_{ij})$ என்க. $i \neq k$ என்றால்

$c_{ij} = a_{ij}$; $\quad c_{kj} = ra_{kj}$ என உள்ளது.

$$|C| = \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, c_{1 1\alpha} \cdots\cdots c_{k\, k\alpha} \cdots\cdots c_{n n\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, a_{1 1\alpha} \cdots\cdots ra_{k\, k\alpha} \cdots\cdots a_{n n\alpha}$$

$$= r\sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, (a_{1 1\alpha} \cdots\cdots ra_{k\, k\alpha} \cdots\cdots a_{n n\alpha})$$

$$= r\,|A| \text{ என ஆகிறது.}$$

தன்மை 5. A ஓர் அணி என்க. இதில் k வரிசையுடைய நிரையுடன், l வரிசையுடைய நிரையின் r என்ற மடங்கைக் கூட்டினால் கிடைக்கும் அணி B என்றால்

$$|B| = |A|$$

$B = (b_{ij})$ என்க. $i \neq k$ என்றால் $b_{ij} = a_{ij}$ என்றும்,

$$b_{kj} = a_{kj} + ra_{lj}$$

$$|B| = \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, b_{1\,1\alpha} \ldots\ldots b_{kk\alpha} \ldots\ldots b_{nn\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, a_{1\,1\alpha} \ldots\ldots (a_{kk\alpha} + a_{ll\alpha}) \ldots\ldots a_{nn\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, a_{1\,1\alpha} \ldots\ldots a_{kk\alpha}\, a_{nn\alpha}$$

$$+ \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\, a_{1\,1\alpha} \ldots\ldots a_{ll\alpha} \ldots\ldots a_{ll\alpha} \ldots\ldots a_{nn\alpha}$$

இரண்டாவது அணிக்கோவையில் இரண்டு நிரைகள் முற்றொருமையாக உள்ளதால் அதன் மதிப்பு பூச்சியமாகிறது.

ஆகையால் $|B| = \sum_{\alpha \in S_n} (\text{திசை } \alpha)\,(a_{1\,1\alpha} \ldots\ldots a_{nn\alpha})$

$= |A|$ எனக் கிடைக்கிறது.

10.4. வரையறைகள் :

A என்ற அணியில் 'i' வரிசையுள்ள நிரையையும், 'j' வரிசையுள்ள நிரலையும் நீக்கிவிட்டால், கிடைக்கும் $(n-1) \times (n-1)$ அணியின் அணிக்கோவைக்கு பொருள் 'a_{ij}'-ன் சிற்றணிக் கோவை (Minor) என்பது பெயர்.

a_{ij}-ன் சிற்றணிக் கோவையை $|M_{ij}|$ எனக் குறிப்போம்.

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ என்பது 'a_{ij}'-ன் **துணைக் காரணி** (Co-factor of a_{ij}) எனப்படுகிறது.

10.5. அணிக்கோவை $|A|$-ல், a_{ij} என்ற பொருளைக் கொண்ட எல்லா உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை $a_{ij}\, A_{ij}$ என்பதாகும்.

நிறுவல் :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2j} & \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots & a_{ij} & \ldots a_{ij} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nj} & \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$ என்க.

முதலில், $|A|$ -ல், a_{11} வரக்கூடிய எல்லா உறுப்புகளின் கூடுதலைக் கீழ்க் கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$a_{11} \sum_{\substack{\alpha \in S_n \\ 1\alpha = 1}} (\text{திசை } \alpha)\ a_{22\alpha}\, a_{33\alpha} \ldots a_{nn\alpha}$$

[$1\alpha = 1$, என்று வைத்துக் கொண்டு, மற்ற $(n-1)$ எண்களில் மாத்திரம் $|\underline{n-1}$ வரிசை மாற்றங்கள் செய்கிறோம்.

இதில் a_{11}-ன் குணகம்

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= |M_{11}|$ என்பதை உணரலாம்.

$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}|$ என்பதால்

$A_{11} = |M_{11}|$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகையால் அணியின் முதல் பொருள் a_{11} ஐக் கொண்ட எல்லா உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை

$a_{11} A_{11}$ என ஆகிறது.

பொதுவாக, a_{ij} என்ற பொருளை எடுப்போம்.

இதை அணியின் முதலிடம் கொண்டு வருவதற்குப் படிப்படியாக நிரைகளுடன் $i-1$ பரிமாற்றங்களும், படிப்படியாக நிரல்களுடன் $j-1$ பரிமாற்றங்களும் செய்ய வேண்டும். ஆகையால் மொத்த பரிமாற்றங் களின் எண்ணிக்கை $i+j-2$ என ஆகிறது.

ஆகையால் புதிய அணிக்கோவை $|B| = (-1)^{i+j-2} |A|$

$= (-1)^{i+j} |A|$ என ஆகிறது. இப்பொழுது B -ல் 'a_{ij}' -ன் சிற்றணிக்கோவையில் மாறுதல் இல்லை.

ஆதலால் $|B|$ -ல் a_{ij} என்ற பொருளை உடைய எல்லா உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $(-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}| = a_{ij} A_{ij}$ என ஆகிறது.

10.6. ஒரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) சார்பாக அணிக்கோவையின் விவரணம் :

உதாரணமாக, A என்ற அணியின் முதல் நிரை $[a_{11} \quad a_{12} \ldots\ldots a_{1n}]$ என உள்ளது. $|A|$ -ல் உள்ள எந்த உறுப்பிலும் இந்த நிரையின் ஒரு பொருள் உள்ளது. ஆகையால் (a_{11} உள்ள உறுப்புகள்) + (a_{12} உள்ள உறுப்புகள்) + (a_{13} உள்ள உறுப்புகள்) + ... + (a_{1n} உள்ள உறுப்புகள்) = $|A|$ -ல் உள்ள எல்லா உறுப்புகளின் கூடுதல்.

ஆகையால், 10.5-ல் கண்டபடி

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots\ldots + a_{1n} A_{1n}$$

என ஆகிறது.

இதேபோல, எந்த நிரையின் அல்லது நிரலின் சார்பாகவும் $|A|$ ஐ விவ்ரிக்கலாம். அதாவது

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (i = 1, \text{ அல்லது } 2 \text{ அல்லது } 3, \ldots\ldots \text{ அல்லது } n)$$

மேலும் $$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (j = 1, \text{ அல்லது } 2 \text{ அல்லது } 3, \ldots \text{ அல்லது } n)$$

10.7. தன்மை 6. அணி A-ல், ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒத்த பொருள்களின் துணைக் காரணியால் பெருக்கிக் கிடைக்கும் கூடுதல் பூச்சியமாகிறது.

அதாவது $k \neq l$ என்றால்

$$a_{k1} A_{l1} + a_{k2} A_{l2} + \ldots\ldots\ldots a_{kn} A_{ln} = 0$$

இதில் காணும் இடக்கைப் பக்கம், 'l' வரிசை எண்ணுள்ள நிரைக்குப் பதிலாக 'k' வரிசை எண்ணுள்ள நிரையை மறுபடியும் எழுதி, 'k' வரிசை எண்ணுள்ள நிரையின் சார்பாக அணிக்கோவையின் விவ்ரணம் என்பதை உணரலாம். இப்படிச் செய்வதால் அணிக்கோவையில் முற்றொருமையுள்ள இரண்டு நிரைகள் இருக்குமாதலால் அதன் மதிப்பு பூச்சியமாகிறது. ஆதலால் மேலே காணும் கூடுதல் பூச்சியமென உணருகிறோம்.

தன்மை 7. ஓர் அணியில், ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள பொருள்கள் ஒவ்வொன்றும் r உறுப்புகளின் கூடுதல் என்றால், அணிக்கோவையை, r அணிக்கோவைகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

உதாரணமாக $r = 3$ என்க.

i வரிசையுள்ள நிரை

$(a_{i1} + b_{i1} + c_{i1} \quad a_{i2} + b_{i2} + c_{i2} \ldots\ldots\ldots a_{in} + b_{in} + c_{in})$ என்க.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}) A_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} A_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} A_{ij}$$

தன்மை 8. ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்த இரண்டு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல்.

உதாரணமாக மூன்று வரிசை எண் உடைய இரண்டு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கலைப் பார்ப்போம். இதேபோல பொதுவான நிறுவலும் கிடைக்கும்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

நிறுவல் : வலக்கைப் பக்கத்திலுள்ள அணிக்கோவையை 27 அணிக்கோவைகளின் கூடுதலாக எழுதலாம். இவைகளில் 6 அணிக்கோவைகளுக்குத்தான் பூச்சியமல்லாத மதிப்புகள் உண்டு. உதாரணமாக முதல் நிரலில் 'a' என்ற எழுத்தும், இரண்டாவது நிரலில் 'c' என்ற எழுத்தும், மூன்றாவது நிரலில் 'b' என்ற எழுத்தும் வருமாறு உள்ள அணிக்கோவையை எடுப்போம். அதாவது

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_1\gamma_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & c_2\gamma_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & c_3\gamma_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\gamma_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha_1\gamma_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\alpha_1\gamma_2\beta_3\triangle$$

முதல் நிரையைத் தேர்ந்தெடுக்க 3 வழிகளும், அதன் பிறகு இரண்டாவது நிரலைத் தேர்ந்தெடுக்க 2 வழிகளும், அதன் பிறகு மூன்ருவது நிரலைத் தேர்ந்தெடுக்க 1 வழியுமுள்ளது. ஆதலால் இது போன்ற அணிக்கோவைகளின் எண்ணிக்கை $3 \times 2 \times 1 = 6$ என ஆகிறது. மற்ற 21 அணிக்கோவைகளும் பூச்சியங்களாகின்றன. உதாரணமாக,

$$\begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 & a_3\alpha_3 \\ b_3\beta_1 & a_3\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$= \beta_1\alpha_2\alpha_3 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$ என ஆகிறது.

பூச்சியமல்லாத 6 அணிக்கோவைகளின்

கூடுதல் $= \triangle \times [\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\gamma_2\beta_3 - \beta_1\alpha_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma\alpha_2\beta_3 - \gamma_1\beta_2\alpha_3]$

$$= \triangle \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

10.8. n வரிசை எண் உடைய இரண்டு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கலைக் கீழ்க்கண்ட விதமும் குறிக்கலாம்.

$$|A| = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ R_n \end{bmatrix}; \quad |B| = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

; R_1, R_2 .... என்பவைகள் $|A|$-ன் நிரைகள்.

r_1, r_2 .... என்பவைகள் $|B|$-ன் நிரைகள்.

$$|A|\ |B| = \begin{bmatrix} R_1 r_1 & R_1 r_2 \ldots\ldots\ldots R_1 r_n \\ R_2 r_1 & R_2 r_2 \ldots\ldots\ldots R_2 r_n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n r_1 & R_n r_2 \ldots\ldots\ldots R_n r_n \end{bmatrix}$$

பயிற்சி

1. $A = (a_{rs})$ என்பது ஒரு (5×5) அணியானுல் $|A|$-ல் உள்ள கீழ்க்கண்ட உறுப்புகளின் திசைகளைக் காணவும்.

(1) $a_{11}\ a_{25}\ a_{32}\ a_{43}\ a_{54}$

(2) $a_{14}\ a_{25}\ a_{33}\ a_{41}\ a_{52}$

2. $|A| = 0$ ஆனுல் A-ன் நிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) ஒருபடிச் சார்பு கொண்டவை எனக் காட்டவும்.

$[\ |A| = 0 \ \therefore\ R(A)<n \ \therefore\ R_1(A)<n]$

3. $|A|$-ன் மதிப்புக் காணவும்.

(1) $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ (2) $A = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$

(3) $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

4. A_{rs}, (a_{rs})-ன் துணைக் காரணியானுல், $|A_{rs}| = |a_{rs}|^{n-1}$ என்றும்,

$|A_{rs}|$-ல் A_{rs}-ன் துணைக் காரணி, B_{rs} ஆனுல்,

$B_{rs} = a_{rs}\ |a_{rs}|$ என்றும் நிறுவுக.

5. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$—இவைகளிலிருந்து x_1, x_2, x_3 இவைகளை விலக்கவும்.

BIBLIOGRAPHY

1. 'Modern Algebra' by Neal H. Mecoy (Allyn and Bacon Inc.)

2. 'Modern Algebra' by John L. Kelley (Von Nontirand)

3. An Introduction to 'Linear Algebra' by L. Mirsky (Oxford at the Clarendan Press)

4. A Text Book of Matrices by Shanti Narayan (S. Chand and Co., Delhi)

கலைச்சொற்கள்

A

Abstract — அருவ
Associative Law — சேர்ப்பு விதி
Automorphism — தானே அமையும் ஒரே அமைப்புத் தன்மை

B

Basis — ஆதாரக்கணம்
Binary operation — இரட்டைப் பொருள் செயல்
Bi-unique correspondence — ஒன்றுக்கொன்றான பிரத்தியேக இணைப்பு

C

Cancellation law — நீக்கல் விதி
Cayley's theorem — கேலீயின் தேற்றம்
Cayley-Hamilton theorem — கேலீ-ஹாமில்டன் தேற்றம்
Characteristic Equation — சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு
Characteristic Root — சிறப்பியல்புத் தீர்வு
Characteristic Vector — சிறப்பியல்பு வெக்டர்
Closure law — அடைப்பு விதி
Column — நிரல்
Commutative Law — பரிமாற்று விதி
Complement — நிரப்பி
Complementary Sub-spaces — நிரப்பி உள் வெளிகள்
Complex number — கலப்பெண்
Components — உட்பொருள்கள்

Congruence of Numbers — எண்களின் முற்றொருமை
Conjugate Complex Number — துணைக்கலப்பெண்
Co-factor — துணைக்காரணி
Consistent — முரண்பாடற்ற
  Inconsistent — முரண்பாடுள்ள
Co-set — துணைக் கணம்
Cramer's Rule — கிராமரின் விதி
Critical Minor — விளிம்பு சிற்றணிக் கோவை

D

De Morgan Law — தேமார்கன் விதி
Determinant — அணிக்கோவை
Dimensionality — பரிமாணம்
Disjoint — ஒன்றுக்கொன்று பொது இல்லாத
Division Algorithm — வகுத்தல் இயல்பு
Division law — வகுத்தல் விதி
Domain — அரங்கம்

E

Eigen Value·Characteristic Root — சிறப்பிடல்புத் தீர்வு
Eigen Value -
  Characteristic Vector — சிறப்பியல்பு வெக்டர்
Element — பொருள்
Elementary operation — எளிய செயல்
Empty set — வெற்றுக் கணம்
Equivalence Relation — சமத்துவ இணைப்பு
Equivalence Set — சமத்துவக் கணம்
Even — இரட்டை

F

Field — களம்
Finite — முடிவுள்ள
  Infinite — முடிவில்லாத

G

Generator — பிறப்பாக்கி
Group — குலம்
Group Abelian — ஏபெலியின் குலம்
Group Alternating — ஒன்று விட்டு அமையும் குலம்

Group Cyclic — சுழற்குலம்
Group Operator — செயல் குலம்
Group Sub — உட்குலம்
Group Symmetric — சமச்சீர்க் குலம்

H

Homogeneous Linear Equation — சமபடித்தான ஒரு படிச் சமன்பாடு
Hermitian Form — ஹெர்மீஷியன் உருவம்

I

Identity element — முற்றொருமைப் பொருள்
Image — பிம்பம்
Inequality — சமனின்மை
Integer — முழு எண்
Integral Domain — முழுமை அரங்கம்
Intersection — உள் வெட்டு
Inverse — எதிர்ப்பொருள்
Inverse Additive — கூட்டலில் எதிர்ப்பொருள்
Inverse Multiplicative — பெருக்கலில் எதிர்ப்பொருள்
Inner Product — உட் பெருக்கல்
Isomorphism — ஒரே அமைப்புத் தன்மை

K

Klein 4-group — க்ளின் 4 குலம்

L

Lagrange's theorem — இலக்ராஞ்சியின் தேற்றம்
Linear Combination — ஒரு படித்தான சேர்க்கை
Linear Dependence — ஒரு படித்தான சார்பு (ஒ. ப. சா.) கொண்டமை.
Linear Independence — ஒரு படித்தான சார்பு (ஒ. ப. சா.) இல்லாமை
Linear Equation — ஒருபடிச் சமன்பாடு
Linear Transformation — ஒரு படி மாற்றம்

M

Matric polynemial	—	அணி பல்லுறுப்புக் கோவை
Matrix	—	அணி
— Adjugate, Adjoint	—	அடுத்திரு அணி
— Augumented	—	விஸ்தரிக்கப்பட்ட அணி
— Complex	—	கலப்பெண் அணி
— Column	—	நிரல் அணி
— Congruent	—	முற்றொருமை அணி
— Conjugate	—	துணைக் கலப்பெண் அணி
— Conjugate Transpose	—	துணைக் கலப்பெண் அணியின் மாற்றவணி
— Diagonal	—	மூலை விட்ட அணி
— Elementary	—	எளிய அணி
— Hermitian	—	ஹெர்மீஷியன் அணி
— Inverse	—	எதிர் அணி
— Partitioned	—	பிரிவினை செய்யப்பட்ட அணி
— Orthogonal	—	செங்குத்து அணி
— Real	—	மெய்யெண் அணி
— Rectangular	—	செவ்வக அணி
— Row	—	நிரை அணி
— Scalar	—	திசையிலி அணி
— Similar	—	வடிவொத்த அணி
— Singular	—	சிறப்பு அணி
— Non singular	—	சிறப்பில்லாத அணி
— Skew-symmetric	—	சரிந்த சமச்சீர் அணி
— Skew Hermitian	—	சரிந்த ஹெர்மீஷியன் அணி
— Square	—	சதுர அணி
— Sub	—	சிற்றணி
— Symmetric	—	சமச்சீரணி
— Triangular	—	முக்கோண அணி
— Upper Triangular	—	மேல் முக்கோண அணி
— Lower Triangular	—	கீழ் முக்கோண அணி
— Unit	—	அலகு அணி
— Unitary	—	கலப்பெண் செங்குத்து அணி
Mapping	—	வரைதல்
Mapping Into	—	உள் வரைதல்
Mapping Onto	—	மேல் வரைதல்
Mapping One one	—	ஒன்றுக்கொன்றான வரைதல்
Modulus	—	மட்டு

Multiplication Table — பெருக்கல் அட்டவணை

N

Normalisation — தரப்படுத்துதல்
Normal form — இயல்பான உருவம்

O

Operation — செயல்
Operator — செயுல்
Order — வரிசை எண்
Ordered pair — வரிசைப் படுத்தப் பெற்ற சோடி
Ordered integral domain — வரிசைப் படுத்தப் பெற்ற முழுமை அரங்கம்
Orthogonality — செங்குத்துத் தன்மை
Orthogonal Complement — செங்குத்து நிரப்பி
Orthogonal Vectors — செங்குத்து வெக்டர்கள்
Orthonormal Vectors — தரச் செங்குத்து வெக்டர்கள்

P

Permutation — வரிசை மாற்றம்
Permutation Cyclic — சுழற் வரிசை மாற்றம்
Positive — நேர்
Polynomial — பல்லுறுப்புக் கோவை
Post-operation — பின் செயல்
Pre-operation — முன் செயல்
Prime Number — பகா எண்
Principal or Leading diagonal — தலைமை மூலை விட்டம்
Projective geometry — வீழல் வடிவ கணிதம்

Q

Quadratic form — இரு படி உருவங்கள்
Quadrics — இரு படி மேற்பரப்பு

R

Range — வீச்செல்லை
Rank of a matrix — அணியின் தரம்
Rank of a Column — நிரல் தரம்

Rank of a Row	—	நிரைத் தரம்
Rational Number	—	விகிதமுறு எண்
Real Number	—	மெய்யெண்
Reduction to Diagonal form	—	மூலை விட்ட உருவத்துக்குச் சுருக்குதல்
Reduction to Principal axes	—	தலைமை அச்சுகளுக்குச் சுருக்குதல்
Reduction to Orthogonal	—	செங்குத்து அணியால் சுருக்குதல்
Residue class	—	மீதக் கணம்
Ring	—	வளையம்
Ring Commutative	—	பரிமாறு வளையம்
Ring with unity	—	ஒருமைப் பொருள் கொண்ட வளையம்
Row	—	நிரை
Rule of Composition	—	சேர்க்கும் விதி

S

Scalar	—	திசையிலி
Schmidt's orthogonalisation process	—	ஸ்மிட்டின் செங்குத்து வெக்டர் கணம் உருவாக்குதல்
Schwarz Inequality	—	ஸ்க்வார்ஸ் சமனின்மை
Set	—	கணம்
Sub-set	—	உட்கணம்
Universal set	—	முழுமைக் கணம்
Product set	—	பெருக்கல் கணம்
Proper sub-set	—	சரியான உட்கணம்
Set theory	—	கணக் கொள்கை
Sign	—	திசை
Signature	—	திசை இயல்பு
Similarity Transformation	—	வடிவொத்த அணி மாற்றம்
Solution	—	தீர்வு
Solution Vector	—	தீர்வு வெக்டர்
Synthetic Method	—	தொகு முறை

T

Transposition	—	பரிமாற்றம்
Transforming Matrix	—	மாற்றும் அணி

Triangle Inequality — முக்கோணச் சமனின்மை
Trivial solution — அற்பமான தீர்வு
Non Trivial solution — அற்பமில்லாத தீர்வு

U

Union — கூட்டு
Unit — அலகு

V

Vector — வெக்டர்
Vector Space — வெக்டர் வெளி
Vector Sub space — வெக்டர் உள் வெளி
Venn Diagram — 'வெண்' படங்கள்

W

Well ordered set — நன்கு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம்

Z

Zero — பூச்சியப் பொருள்.